E-ISSN 2181-1466

9 772181 146004

ISSN 2181-6875

9 772181 687004

@buxdu_uz @buxdu1 @buxdu1 www.buxdu.uz

Научный вестник Бухарского государственного университета
Scientific reports of Bukhara State University

4/2023

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI
ILMIY AXBOROTI

4/2023

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI
SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY
НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК БУХАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Ilmiy-nazariy jurnal
2023, № 4, may

Jurnal 2003-yildan boshlab **filologiya** fanlari bo'yicha, 2015-yildan boshlab **fizika-matematika** fanlari bo'yicha, 2018-yildan boshlab **siyosiy** fanlar bo'yicha O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo'lgan zaruriy nashrlar ro'yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2000-yilda tashkil etilgan.
Jurnal 1 yilda 12 marta chiqadi.

Jurnal O'zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2020-yil 24-avgust № 1103-sonli guvohnoma bilan ro'yxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti
Tahririyat manzili: 200117, O'zbekiston Respublikasi,Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko'chasi, 11-uy.
Elektron manzil: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

MUNDARIJA *** СОДЕРЖАНИЕ *** CONTENTS

ANIQ VA TABIIY FANLAR *** EXACT AND NATURAL SCIENCES *** ТОЧНЫЕ И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

UDK: 519.6

FUNKSIYALARNI MATHCAD MUHITIDA SONLI INTEGRALLASH

Imomova Shafoat Mahmudovna,
Buxoro davlat universiteti Amaliy matematika va dasturlash texnologiyalari kafedrasi dotsenti
shafoati@mail.ru
Rahmonqulova Zarnigor Bahodirovna,
Buxoro davlat universiteti Amaliy matematika (sohalar bo'yicha) mutaxassisligi magistri
Rahmonqulovazarnigor000@gmail.com

Annotatsiya: *Maqolada aniq integralning geometrik ma'nosi va integralni to'g'ri to'rtburchaklar formulasi yordamida hisoblash metodikasi ko'rsatilgan. Aniq integralni Mathcad muhitida trapetsiyalar va Simpson formulasi bilan hisoblash metodikasi taklif etilgan. Berilgan misolni hisoblash uchun adabiyotlarda ma'lum bo'lgan sonli usullardan foydalanilgan. Berilgan oraliqda integral qiymatini hisoblash uchun oraliqni qancha kichik bo'laklarga bo'lsak, yechim shu darajada aniq bo'ladi.*

Kalit so'zlar: *boshlang'ich funksiya, elementar funksiya, integral, aniq integral, aniqmas integral, kvadratur, kvadratur formula, to'g'ri to'rtburchak formulasi, trapetsiya formulasi, Simpson formulasi, egri chiziqli trapetsiya, egri chiziqli trapetsiya yuzi, aniq yechim, bo'linish nuqtalari.*

ЧИСЛЕННАЯ ИНТЕГРАЦИЯ ФУНКЦИЙ В СРЕДЕ MATHCAD

Аннотация: *В статье представлен метод расчёта точного значения геометрического значения интеграла и формулы прямоугольников для расчёта интеграла. Метод расчёта интеграла с помощью формул трапеции и Симпсона предложен в среде Mathcad. Для расчёта примера использовались численные методы, известные из литературных источников. Для определения значения интеграла в заданном интервале интеграл был разбит на маленькие отрезки, чтобы получить точный результат.*

Ключевые слова: *начальная функция, элементарная функция, интеграл, определённый интеграл, неопределённый интеграл, квадратура, квадратурная формула, формула прямоугольника, формула трапеции, формула Симпсона, кривая трапеция, криволинейная поверхность трапеции, точное решение, точки деления.*

NUMERICAL INTEGRATION OF FUNCTIONS IN THE MATHCAD ENVIRONMENT

Annotation: *The article presents a method for calculating the exact value of the geometric value of the integral and the formula of rectangles for calculating the integral. The method for calculating the integral using the trapezoid and Simpson formulas is proposed in the Mathcad environment. Numerical methods known from the literature were used to calculate the example. To determine the value of the integral in a given interval, it was divided into small segments in order to obtain an accurate result.*

Keywords: *initial function, elementary function, integral, definite integral, indefinite integral, quadrature, quadrature formula, rectangle formula, trapezoid formula, Simpson's formula, curved trapezoid, curvilinear surface of a trapezoid, exact solution, dividing points.*

Kirish.

Kundalik hayotimizda uchraydigan ko'p muhandislik masalalarini yechishda aniq integrallarni hisoblashga to'g'ri keladi. Faraz qilaylik, $\int_a^b f(x)\,dx$ hisoblash talab etilsin. Bu yerda $f(x) - [a;b]$ kesmada berilgan uzluksiz funksiya. Bu integralni hisoblashda quyidagi formula (Nyuton—Leybnits formulasi) qo'llaniladi:

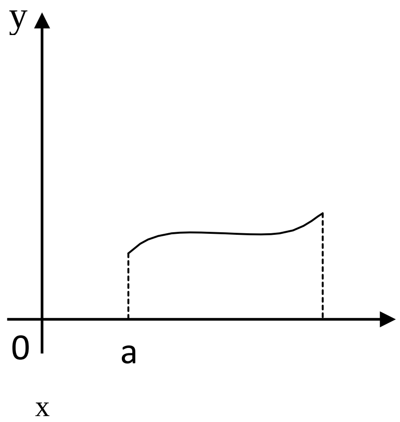
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad (1)$$

bu yerda $F(x)$– boshlang'ich funksiya. Agar boshlang'ich funksiya $F(x)$ ni elementar funksiyalar orqali ifodalab bo'lmasa yoki integral ostidagi funksiya $f(x)$ jadval ko'rinishida berilsa, u holda (1) formuladan foydalanish mumkin emas. Bu holda aniq integralni taqribiy formulalar orqali hisoblashga to'g'ri keladi. Bunday formulalarga kvadratur formulalar deyiladi.

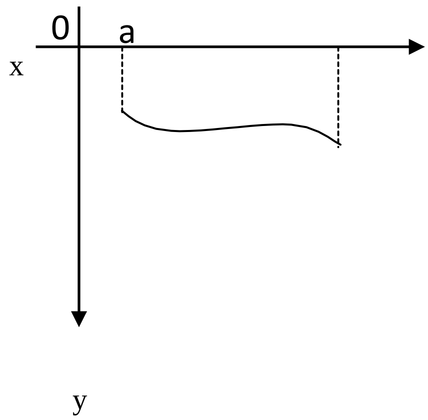
Asosiy qism.

Aniq integralning geometrik ma'nosi

Kvadratur formulalarni keltirib chiqarish uchun aniq integralning geometrik ma'nosini bilmoqlik lozim. Agar $[a;b]$ kesmada $f(x) \geq 0$ bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx$ ning qiymati son jihatidan $y = f(x)$ funksiyani grafigi hamda $x = a, x = b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan shakl (figura) ning yuziga teng (1-rasm). Agar $[a;b]$ kesmada $f(x) < 0$ bo'lsa, integralning qiymati yuqorida keltirilgan shaklning teskari ishora bilan olingan yuziga teng (2-rasm).



1- rasm



2-rasm

Shunday qilib aniq integralni hisoblash deganda biror shaklning yuzini hisoblash tushuniladi.[1] Quyida aniq integralni hisoblash uchun ba'zi taqribiy formulalar bilan tanishib chiqamiz.

To'g'ri to'rtburchaklar va trapetsiyalar formulasi

Faraz qilaylik, bizdan $\int_a^b f(x)dx$ aniq integralning taqribiy qiymatini topish talab etilsin. $x_0, x_1, x_2, .., x_n$ nuqtalar yordamida $[a;b]$ kesmani p ta teng bo'lakchalarga bo'lamiz. Har bir bo'lakchaning uzunligi $h = \frac{b-a}{n}$. Bo'linish nuqtalari esa:

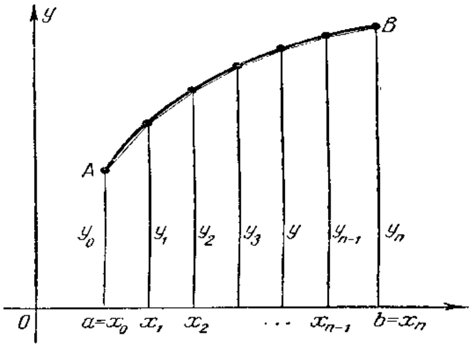
x_0= a; x_1= a + h; x_2= x + 2h; x_3 = a+3h … x_{n-1}= a+(n-1)h; x_n = b

Bu nuqtalarni tugun nuqtalar deb ataymiz. $f(x)$ funksiyaning tugun nuqtalaridagi qiymatlari y_0, y_1, y_2, … y_n bo'lsin. Bular y_0 = f(a); y_1 = f(x_1) … y_n=f(b) larga teng bo'ladi .

Egri chiziqli trapetsiyaning yuzini topish uchun $[a;b]$ kesmani bo'lish natijasida hosil bo'lgan barcha to'rtburchaklarning yuzini hisoblab, ularni jamlash kerak bo'ladi. Albatta, bu yuzachalarni hisoblashlarda ma'lum darajada xatoliklarga yo'l qo'yiladi (shtrixlangan yuzachalar). Bularni va aniq integralning geometrik ma'nosini hisobga olsak, quyidagini yozishimiz mumkin bo'ladi:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot y_0 + hy_1 + hy_2 + \cdots + hy_{n-1} = h(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}) = h \sum_{k=0}^{n-1} y_k$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{k=0}^{n-1} y_k \qquad (2)$$



3-rasm

Bu yerda to'g'ri to'rtburchak yuzini hisoblashda uning chap tomon ordinatasi olindi. Agar o'ng tomon ordinatani olsak ham shunday formulaga ega bo'lamiz:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n) = h\sum_{k=1}^{n} y_k$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{k=1}^{n} y_k \qquad (3)$$

(2) va (3) lar mos ravishda chap va o'ng formulalar deyiladi. Agar 3- rasmga e'tibor bersak, (2) formula bilan integralning qiymati hisoblanganda integralning taqribiy qiymati aniq qiymatidan ma'lum darajada kamroq chiqadi, (3) yordamida hisoblanganda esa taqribiy qiymat aniq qiymatdan ma'lum darajada kattaroq chiqadi.

Ya'ni (2) va (3) formulalar yordamida aniq integralning taqribiy qiymati hisoblanganda bu formulalardan biri integralning aniq qiymatini kami bilan ifodalasa, ikkinchisi esa ko'pi bilan ifodalaydi. 3-rasmdan ko'rinadiki, (2) va (3) formulalarni qo'llaganda yo'l qo'yiladigan xatolikni kamaytirish uchun bo'linish nuqtalarini iloji boricha ko'proq olish, ya'ni qadam h ni tobora kichraytirish lozim bo'ladi. Albatta, h ni kichraytirish hisoblash jarayonining keskin o'sishiga olib keladi. Bunday holatda butun hisoblash jarayoni EHM ga yuklanadi. [2,10]

Misol. To'g'ri to'rtburchaklar formulalari (2) va (3) yordamida $\int_0^1 \frac{0,5dx}{1+2x}$ integralning taqribiy qiymatlari topilsin.

Yechish: Bu yerda a=0; b=1; n=10; h=(b- a)/n=0,1.

$$f(x) = \frac{0,5}{1+2x}$$

$$x_0 = a = 0; \quad x_1 = a + h = 0; \quad x_2 = a + 2h = 0,2; \quad x_3 = a + 3h = 0,3;$$

$$x_4 = a + 4h = 0,9 \ \dots \ x_9 = a + 9h; \quad x_{10} = b = 1$$

$$y_0 = f(x) = \frac{0.5}{1+2x} = \frac{0.5}{1+2x} = 0.5; \quad y_1 = f(x_1) = \frac{0.5}{1+0,2} = 0,416;$$

$y_2 = f(x_2) = 0,357;$ $y_3 = f(x_3) = 0,3125;$ $y_4 = f(x_4) = 0,278;$ $y_5 = f(x_5) = 0,25;$ $y_6 = f(x_6) = 0,2273;$ $y_7 = f(x_7) = 0,208;$ $y_8 = f(x_8) = 0,192$ $y_9 = f(x_9) = 0,179;$ $y_{10} = f(x_{10}) = 0,167.$

(2) formulaga ko'ra $\int_0^1 \frac{0,5dx}{1+2x} \approx 0,1(0,5 + 0,416 + 0,357 + 0,3125 + 0,278 + 0,25 + 0,2273 + 0,208 + 0,192 + 0,179) = 0,29198$

(3) formulaga ko'ra $\int_0^1 \frac{0.5dx}{1+2x} \approx 0,1(0,416 + 0,357 + 0,3125 + 0,278 + 0,25 + 0,2273 + 0,208 + 0,192 + 0,179 + 0,167) = 0,259$

Ma'lumki $\int_0^1 \frac{0.5dx}{1+2x} = \frac{1}{4}ln3, \ \frac{1}{4}ln3 \approx 0,275.$

Bulardan ko'rinadiki, aniq yechim chap va o'ng formulalar orqali topilgan yechimlar orasida yotadi. Topilgan yechimlar $0,29198$ va $0,259$ ning o'rta arifmetigini olsak, bu $0,275$ ga teng bo'ladi, bu esa aniq yechim bilan ustma-ust tushadi. Bu xulosalarni nazarga olgan holda (2) va (3) formulalar hadlarini mos ravishda qo'shib o'rta arifmetigini olsak, quyidagi ifoda hosil bo'ladi :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right) = h\left(\frac{y_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} y_k + \frac{y_n}{2}\right) \quad (4)$$

(4) formula *trapetsiyalar formulasi* deb ataladi. Bu formula yordamida topilgan integralning taqribiy qiymatining aniqligini oshirish uchun bo'linish nuqtalari soni n ni ikki, uch va h.k. marta oshirish kerak bo'ladi. Albatta, bunda ham hisoblash hajmi bir necha marotaba oshadi.

Simpson (parabola) usul

Simpson formulasi yuqorida keltirib chiqarilgan formulalarga qaraganda aniqligi yuqori bo'lgan formula hisoblanadi. Bu formulada integralning qiymatini yuqori aniqlikda olish uchun bo'linish qadamlarini tobora oshirish talab etilmaydi. [a,b] kesmani $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ nuqtalar bilan n=2 ta juft teng bo'lakchalarga ajratamiz. $u = f(x)$ egri chiziqqa tegishli bo'lgan (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) nuqtalar orqali parabola o'tkazamiz Bizga ma'lumki, bu parabolaning tenglamasi

$$y = Ax^2 + Bx + C \quad (5)$$

bo'ladi, bu yerda A, B, C — hozircha noma'lum bo'lgan koeffitsiyentlar. $[x_0, x_2]$ kesmadagi egri chiziqli trapetsiyaning yuzini shu kesmadagi parabola bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi bilan almashtirsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_2} (Ax^2 + Bx + C)\,dx = \left[A\frac{x^3}{3} + Cx + B\frac{x^2}{2}\right] = A\frac{x_2^3 - x_0^3}{3} + B\frac{x_2^2 - x_0^2}{2} + C(x_2 - x_0)$$

$(x_2 - x_0)$ ni qavsdan tashqariga chiqarib, umumiy maxrajga keltirsak

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \frac{x_2 - x_0}{6}\left[2A(x_0^2 + x_0x_2 + x_2^2) + 3B(x_0 + x_2) + 6C\right] \quad (6)$$

(5) dagi noma'lum A, B, C koeffitsiyentlar quyidagicha topiladi: x ning x_0, x_1, x_2 qiymatlarda $f(x)$ning qiymatlari y_0, y_1, y_2 ekanini $x_1 = \frac{x_0 + x_2}{2}$ jamini hisobga olsak, (5) dan :

$$y_0 = Ax_0^2 + Bx_0 + C,$$

$$y_1 = A\left(\frac{x_0 + x_2}{3}\right)^2 + B\frac{x_0 + x_2}{2} + C \quad (7)$$

$$y_2 = Ax_2^2 + Bx_2 + C$$

(7) ning ikkinchi ifodasini to'rtga ko'paytirib, uchala tenglikni bir-biriga qo'shsak:

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = A[x_0^2 + (x_0 + x_2)^2 + x_2^2] + B[x_0 + 2(x_0 + x_2) + x_2] + 6C = 2A[x_0^2 + x_0x_2 + x_2^2] + 3B(x_0 + x_2) + 6C \quad (8)$$

Bu ifodani (6) bilan solishtirsak, bularning o'ng taraflari bir xil ekanligini ko'ramiz. (8) ni (6) ning o'ng tarafiga quysak va $x_2 - x_0 = 2h$ $\left[h = \frac{b-a}{n}\right]$ ekanligini e'tiborga olsak, quyidagi taqribiy tenglikni topamiz:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \quad (9)$$

Xuddi shunday formulani $[x_2, x_4]$ kesma uchun ham keltirib chiqarish mumkin:

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) \quad (10)$$

Bu formulalarni butun kesma $[a, b]$ uchun keltirib chiqarib, bir-biriga qo'shsak, quyidagini hosil qilamiz:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots 2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}) \quad (11)$$

Bu topilgan formula Simpson formulasidir. Ba'zi hollarda uni parabolalar formulasi deb ham ataydilar.

(11) ni eslab qolish unchalik qiyin emas; toq raqamli ordinatalar to'rtga, juft raqamli ordinatalar (ikki chekkadagi ordinatadan tashqari) ikkiga ko'paytiriladi. Chekkadagi ordinatalar y_0, y_{2m} esa birga ko'paytiriladi.

Natijalar.

Misol $I = \int_0^1 \frac{0.5dx}{1+2x^2}$ integralning qiymatini trapetsiyalar formulasi hamda Simpson formulasi yordamida toping.

Yechish: Bu yerda $0 \le x \le 1; n = 10, a = 0, b = 1,\ h = \frac{b-a}{n} = 0{,}1\ f(x) = y = \frac{0.5}{1+2x^2}$

Quyidagi jadvalni to'ldiramiz

1-jadval

x	x^2	$1+2x^2$	$y = f(x) = \frac{0.5}{1+2x^2}$	x	x^2	$1+2x^2$	$y = f(x) = \frac{0.5}{1+2x^2}$
0,0	0,0	1,0	0,5	0,6	0,36	1,72	0,2906977
0,1	0,01	1,02	0,4901961	0,7	0,49	1,98	0,2525253
0,2	0,04	1,08	0,46296296	0,8	0,64	2,28	0,2192982
0,3	0,09	1,18	0,42372881	0,9	0,81	2,62	0,19083969
0,4	0,16	1,32	0,3787878	1,0	1,0	3,0	0,16666667
0,5	0,25	1,5	0,33333333				

Trapetsiya formulasiga asosan

$$I = \int_0^1 \frac{0{,}5}{1+2x^2}dx \approx h\left(\frac{y_0+y_{10}}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9\right)$$

$$= 0{,}1\left(\frac{0.5 + 0{,}6666667}{2} + 0{,}4901961 + 0{,}46296296 + 0{,}42372881 + 0{,}3787878 + 0{,}33333333 + 0{,}2906977 + 0{,}2525253 + 0{,}19083969\right) = 0{,}313550711$$

Mathcad muhitida integralning qiymatini trapetsiyalar formulasi yordamida topish dasturi.

a:=0 b:=1

n:=10

$$f(x) := \int_0^1 \frac{0.5}{1+2\cdot x}dx$$

$$S := \frac{b-a}{n}\cdot\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n}i\right)\right) + \frac{f(a)+f(b)}{2}\right]$$

S = 0.275

Simpson formulasiga asosan

$I = \int_0^1 \frac{0{,}5}{1+2x^2} \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + 4y_7 + 2y_8 + 4y_9 + y_{10} = \frac{0{,}1}{3}[0{,}5 +$
$0{,}16666667 + 4(0{,}42372881 + 0{,}33333333$
$+0{,}2525253 + 0{,}19083969) + 2(0{,}46296296 + 0{,}3787878 +$
$0{,}2906977 + 0{,}2192982)] = 0{,}272395613$

Mathcad muhitida integralning qiymatini Simpson formulasi yordamida topish dasturi.

a:=0 b:=1 n:=10

$$f(x) := \int_0^1 \frac{0.5}{1+2\cdot x}dx$$

$$S := \frac{b-a}{6\cdot n}\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}\left[f\left[a+(i-1)\cdot\frac{b-a}{n}\right]+\left(4f\left(a+i\cdot\frac{b-a}{2\cdot n}\right)+f\left(a+i\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right)\right]\right]$$

$S = 0.275$

Mathcadning ichki dasturi yordamida hisoblangan qiymat

$$\int_0^1 \frac{0.5}{1+2\cdot x}\,dx = 0.275$$

Xulosa.

Ushbu ishda funksiyalarni Mathcad muhitida sonli integrallash masalasi o'rganildi. Dastlab aniq integralning geometrik ma'nosi ko'rsatildi. Shunga bog'liq ravishda integralni hisoblashni to'g'ri to'rtburchak, trapetsiya va Simpson formulalari yoritildi. Aniq integralni hisoblash misollar orqali Matchad muhitida ham bajarildi. Ushbu metodikaga asoslangan holda integralni hisoblashda olingan natijalar Mathcadning ichki dasturi bilan hisoblangan integral qiymati bilan solishtirganda yaxshi natija ko'rsatmoqda.

ADABIYOTLAR:

1. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.Н. Численные методы. М: Наука, 1987.*
2. *Самарский А.А, Введение в численные методы. М: Наука, 1987.*
3. *Imomova Shafoat Mahmudovna. Matematikani o'qitishda matematik tizimlardan foydalanish // Pedagogik mahorat. Maxsus son (2022 yil, derkabr),2022, C.77-80.*
4. *Imomova Shafoat. Blockchain va uning axborot xavfsizligiga ta'siri //Pedagogik mahorat. Maxsus son(2021 yil, derkabr),2021, C.88-90.*
5. *Имомова Ш.М., Норова Ф.Ф. Работа с криптовалютой//Universum: технические науки. №10(91), 2021. С. 18-21.*
6. *Имомова Ш.М., Норова Ф.Ф. Роль социальных сетей в образовании//universum: технические науки. №10(103), 2022. С. 30-32.*
7. *Imomova Shafoat Mahmudovna, Norova Fazilat Fayzulloyevna. Ta'lim jarayonlarini raqamli texnologiyalar asosida takomillashtirish// Miasto Przyszłości, Vol. 32 (2023), C.47-49.*
8. *Имомова Ш.М., Исмоилова М.Н. Вычисление наибольшего собственного значения матрицы и соответствующего ей собственного вектора в среде Mathcad// ACADEMY. № 6(57), 2020. С9.*
9. *Имомова Ш.М., Исмоилова М.Н. Численное решение смешанной задачи, поставленное на векторном волновом уравнении в области с углом//Universum: технические науки. №10(79), 2020. С. 22-25.*
10. *Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. – М.: Физматлит, 2004. - 400 с.*