

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL
AND APPLIED MATHEMATICS



ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Спецвыпуск № 2/1(40) 2022

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Азамов А.А., Арипов М.М., Шадиметов Х.М.

Ответственный секретарь:

Ахмедов Д.Д.

Редакционный совет:

Азамова Н.А., Алоев Р.Д., Бурнашев В.Ф., Гасанов Э.Е. (Россия),
Загребина С.А. (Россия), Задорин А.И. (Россия), Игнатъев Н.А.,
Ильин В.П. (Россия), Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия),
Карачик В.В. (Россия), Маматов Н.С., Мирзаев Н.М., Мухамедиева Д.Т.,
Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина), Раджабов С.С.,
Расулов А.С., Самаль Д.И. (Беларусь), Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р.,
Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К., Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия),
Шабозов М.Ш. (Таджикистан), Шадиметов Х.М., Dimov I. (Болгария),
Li Y. (США), Mascagni M. (США), Min A. (Германия), Rasulev B. (США),
Schaumburg H. (Германия), Singh D. (Южная Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(99871) 231-92-45.

E-mail: info@pvpm.uz.

Сайт: www.pvpm.uz.

Дизайн и компьютерная вёрстка:

Шарилов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 29.04.2022 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №2. Тираж 100 экз.

<i>Ravshanov N., Mirobidova N.M.</i>	
Shartli generativ raqib tarmog'ı yordamida tasvirdan yomg'ir chiziqlari va tumanni olib tashlash	153
<i>Равшианов Н., Назаров Ш., Боборахимов Б.</i>	
Трёхмерная модель процесса диффузии загрязняющегося вещества в неподвижной неограниченной среде	161
<i>Равшианов Н., Назаров Ш.Э., Расулмухаммедов А.</i>	
Исследование основных параметров процессе диффузии вредных веществ в атмосфере	174
<i>Равшианов Н., Саидов У., Орифжанова У.</i>	
Конструктивная методология математического моделирования для исследования массопереноса в сложных системах	192
<i>Рустамов Н.Т., Рустамов Е.Н.</i>	
К вопросу моделирования функционирования психики человека	216
<i>Садиқов Р.Т., Маҳмудова М.М., Очилова А.Б.</i>	
Уч қатламли ўзаро динамик боғланган газ конлари филътрация жараёнини математик моделлаштириш	226
<i>Самижонов А., Ережепов К., Самижонов Б., Болтабоева М., Йўлдошева А.</i>	
Тасвирлар мажмуаси асосида 3D моделларни куриш	239
<i>Самижонов А., Самижонов Б., Мамажонова М., Умарова Б., Тўхтамуродов А.</i>	
Йўл белгиларини аниқлаш ва таниб олиш алгоритмлари	246
<i>Шадманов И.У., Шадманова К.У., Фатуллаева М.Ш.</i>	
Многомерная математическая модель и численный алгоритм решения задач совместного тепловлагопереноса в неоднородных пористых тел	254
<i>Sharipov D., Mukhiddinov B., Ruziqulova N.</i>	
Segmentation in an ancient document imaging and characters	272
<i>Шарипов Д., Тахтемирова Н., Мурадова Ш.</i>	
Оролбўйи региониди тузланиш оқибатида атмосферага тарқалиш жараёнларнинг компьютер модели	280
<i>Umarov M.A., Muradov F.A., Iskandarova S.N., Tursunkulov O.O.</i>	
Deep Learning Studiodan foydalanib yo'l belgilarini chuqur o'qitish modellarini vizuallashtirish	286
<i>Ўринов Э.М., Болтабоева М.Р., Абдуваҳобов Ф.Ф.</i>	
Видеодан ёмғир чизикларини ўчириш алгоритмлари	295
<i>Зайнидинов Х.Н., Нурмуродов Ж.Н., Гофуржонов М.Р., Кобиров С.Ш.</i>	
Моделирование теплового поля печатной платы методом сплайн-функций	305
<i>Маматов Н.С., Абдукадиров Б.А., Муталов С.Х.</i>	
Биометрик идентификациялаш тизимиға сохта чоп этилган хужумларни аниқлашға бўлган ёндашув	315

УДК 519

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРОЦЕССЕ ДИФФУЗИИ ВРЕДНЫХ ВЕЩЕСТВ В АТМОСФЕРЕ

^{1*}Равшанов Н., ²Назаров Ш., ³Расулмухаммедов А.

*ravshanzade-09@mail.ru

¹Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта,

100125, Узбекистан, Ташкент, м-в. Буз-2, 17А;

²Бухарский государственный университет,

200118, Узбекистан, Бухара, ул. М. Икбол дом 11;

³Ташкентский государственный транспортный университет

100067, Узбекистан, Ташкент, ул. Адылходжаева, 1.

Для исследования основных параметров процесса диффузии загрязняющих аэрозольных частиц и углекислых газов в приземном слое атмосферы проведены численные расчеты с помощью полученных аналитических решений одномерных и двумерных задач при различных значениях коэффициента диффузии, масса выбросов из мгновенных точечных источников. Из анализа проведенных численных расчетов установлено, что процесс диффузии аэрозольных частиц и токсичных газов вокруг источника со временем будет расти, и она подчиняется корню квадратному закону по времени. Максимальная концентрация $\theta_{\max}$ загрязняющего вещества всегда наблюдается в точке выброса и убывает со временем

по закону $1/\sqrt{t}$ и численными расчетами установлены, что при росте коэффициента диффузии граница области распространения вредных загрязняющих веществ в атмосфере растет со временем. Когда из промышленных объектов производства выбрасывается газообразных загрязняющих веществ и скорости ветра равно нулю процесс распространения существенно зависит от физико-химических свойств и их плотности.

Ключевые слова: математическая модель, аналитическое решение, процесс диффузия вредных веществ, численный алгоритм.

Цитирование: Равшанов Н., Назаров Ш., Расулмухаммедов А. Исследование основных параметров процесса диффузии вредных веществ в атмосфере // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2022. – № 2/1(40). – С. 174-191.

1 Введение

Интенсивный рост хозяйственной деятельности человека, при игнорировании возможностей природы и закономерностей ее развития привела к необходимости решения одной из актуальных проблем мирового масштаба. Эта проблема связана с задачами защиты и охраны окружающей среды, запасов водных ресурсов и подземных недр от техногенных факторов и отрицательного антропогенного воздействия, которые, в первую очередь, прямо влияют на экологическое состояние приземного слоя атмосферы и качество атмосферного воздуха. Надо отметить, что осаждение вредных и мелкодисперсных аэрозольных частиц и примесей на подстилающую поверхность влечет загрязнение водоемов, почвы и т.д. Подобное нарушение эко-

логического баланса становится причиной массы проблем – рост онкологических, аллергических, астматических и других заболеваний среди населения, ухудшение плодородности сельскохозяйственных угодий, состояния флоры и фауны.

Мониторинг, прогнозирование и анализ распространения примесей в атмосфере являются одними из наиболее актуальных задач в проблеме охраны окружающей среды. Решение этих задач связано с учетом многих факторов, влияющих на процесс переноса и диффузия загрязняющих веществ и примесей в атмосфере. К ним относятся метеорологические условия, тип и мощность источников выброса, физических, механических и химических свойства аэрозольных примесей, орография местности, стратификация воздушной массы атмосферы и т.д.

Существует множество наземных источников загрязнения такого рода, в том числе природные и искусственные породные отвалы, промышленные площадки, осушенные части водоемов (например, Аральское море), солончаки и пустынные области, транспортные системы, теплоэлектростанций, химзаводы, горнодобывающие, нефти и газодобывающие объекты и т.д.

Экологическое состояние приземного слоя атмосферы значительно влияет на живую природу нашей планеты. Вредные выбросы в атмосферу негативно сказываются на качестве воздуха, который мы непосредственно вдыхаем с помощью дыхательной системы. Последующее осаждение вредных частиц и примесей на подстилающую поверхность влечет загрязнение водоемов и почвы. Подобное нарушение экологического баланса становится причиной массы проблем, включая ухудшение плодородности сельскохозяйственных угодий, состояния флоры и фауны, а также здоровья населения и решение этих задач является актуальной проблемой в мировом масштабе.

Обзорный анализ источников [1–5] показал, что вопросы моделирования распространения загрязняющих веществ в атмосфере достаточно подробно рассмотрено.

В работе [6] представлена численная модель для анализа мезомасштабного распределения примесей в горах, предгорьях и степной зоне (на примере Кабардино-Балкарской Республики). Применены подробные уравнения гидротермодинамики, переноса газовой примеси, уравнения конденсации и коагуляции, учтено сухое осаждение и вымывание аэрозолей.

Работа [7] посвящена проблемам использования моделей оценки и прогноза загрязнения приземного слоя атмосферы промышленными выбросами. Рассматриваются модели оценки загрязнения атмосферы, используемые в задачах экологической экспертизы.

Статья [8] посвящена математическому моделированию процессов распространения примеси в воздушной среде в прибрежных районах. Предложена новая математическая модель аэродинамических процессов, учитывающая многообразие факторов прибрежных зон: повышенную влажность воздуха, изменчивость атмосферного давления и температуры и др. Разработаны алгоритмы исследования этих моделей, реализованные в виде комплекса программ.

В работе [9] предлагается Байесовский метод для оценки местоположения и относительного вклада источников загрязнения путем включения как физических знаний гидродинамики, так и данных наблюдений. В предлагаемом методе используется гибкий подход к статистическому использованию крупномасштабных данных из модели численного прогноза погоды при интеграции динамики физических процессов в модель. Этот метод иллюстрируется реальным набором данных о ветре.

В работе [10] разработаны математические модели и численные алгоритмы и их программное обеспечение для прогнозирования и мониторинга движения многокомпонентной воздушной среды и транспорта загрязняющих веществ в атмосфере, а также решена задача движения многокомпонентной воздушной среды в атмосфере с учетом парообразования и конденсации.

Диссертационная работа [11] посвящена построению и численному исследованию математических моделей нестационарного переноса загрязняющих примесей в турбулентной атмосфере. Для параметризованного уравнения переноса загрязняющих примесей в атмосфере построены две качественные расчетно-аналитические модели оценки концентрации примесей, первая на основе фундаментальной системы решений однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами; Вторая – на основе представления

искового решения интегральным уравнением Вольтера второго рода и метода последовательных приближений. На основе численного метода покоординатного расщепления трехмерного параметризованного уравнения переноса и итерационно-рекурсивных методов и алгоритмов, разработанных первоначально для одномерной задачи, выполнено построение вычислительных алгоритмов для решения пространственной задачи переноса.

В другой диссертации [12] рассматривается три основных вклада в отношении мониторинга и оценки загрязнения воздуха: обзор методов оценки качества воздуха, исследование влияния пространственной и временной изменчивости загрязнения воздуха на точность методов интерполяции, а также как метода оптимизации сети, мониторинга качества воздуха.

В статье [13] для изучения рассеивания загрязнителей воздуха под воздействием городского теплоснабжения приведена двумерная математическая модель, где учитываются мезомасштабные ветра рассматриваемого региона и погашения загрязняющих веществ, в процессе влажного и сухого осаждения. Авторами для численного интегрирования задачи использованы конечно-разностные схемы Кранка-Николсона с учетом зависимости метеорологических параметров, участвующих в скоростях ветра и профилях вихревой диффузии. Как утверждают авторы, мезомасштабный ветер, создаваемый в рассматриваемом регионе, помогает загрязнителям циркулировать и двигаться вверх, что делает проблему загрязнения воздуха более серьезной. На основе анализа полученных численных расчётов сделан вывод о том, что уровень концентрации загрязняющих веществ усиливается под воздействием выше указанного фактора.

Авторами работ [14] рассматриваются задачи с элементами математического моделирования природных и экологических процессов на основе программного пакета *Matha*, который является свободно распространяемым программным обеспечением. Он охватывает широкий спектр методов символьной и вычислительной математики: решение систем линейных и нелинейных алгебраических, трансцендентных и дифференциальных уравнений, интегрирование и дифференцирование, задачи векторной алгебры и теории матриц, исследование свойств функций, построение графиков.

В статье [15] для проведения комплексного исследования, мониторинга, прогнозирования и принятие управленческого решения по защите пограничного слоя атмосферы, подстилающей подвижности земли, почвы-грунта и подземных вод, разработана математическая модель описывающая процесс распространения активных аэрозольных частиц. Эти частицы выбрасываются из объектов производства, где учитывается погодные климатические факторы, скорости прямой и обратной реакции и скорость реакции распада смеси под действием химической реакции. Так как поставленная задача описывается многомерной системой дифференциальных уравнений в частных производных, для численного интегрирования разработан конечно-разностный численный алгоритм высокого порядка точности по пространственным переменным и по времени.

В работе [16] рассматривается численное моделирование процесс переноса и диффузии загрязнителей воздуха в пограничном слое атмосферы. Разработана математическая модель распространения промышленных выбросов в атмосфере с учетом скорости перемещения мелкодисперсных субстанций и ряд других факторов, влияющих на изменение концентрации вредных веществ в атмосфере.

Авторам работ [17] проведены численные расчеты для исследования процесса эрозии почвы в зависимости от скоростей воздушной массы атмосферы, размера и плотности частиц, а также сил действующих на них.

В работе [18] разработана модель, численный алгоритм и программное средство для прогнозирования процесса переноса и диффузии загрязнителей воздуха в пограничном слое атмосферы.

Исходя из выше сказанных, для проведения комплексного исследования процесса распространения аэрозольных частиц и его концентрации в приземном слое атмосферы необходимо проводить статистическую обработку погодных климатических данных. А также определить основные параметры и существенные факторы и их диапазоны изменения, которые влияют на

процесс переноса и диффузии загрязняющих веществ. Учитывая сказанной выше в работе проводится исследование по определению основных параметров, которые существенно воздействуют на процесс диффузии загрязняющих веществ.

2 Постановка задачи. Одномерная задача - процесс диффузии вредных веществ в атмосфере

Для анализа и исследования основных параметров математической модели процесса распространения вредных аэрозольных частиц в приземном слое атмосферы, рассмотрим одномерную задачу, которая описывает одномерным уравнением диффузии

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями вида

$$\theta(x, 0) = M \delta(x); \quad (2)$$

$$\theta(x, t) = 0 \text{ при } x \rightarrow \infty \quad (3)$$

Где $\theta(x, t)$ - концентрация загрязняющих веществ выброшенных и источника, M – масса мгновенно выброшенных загрязняющих веществ; $\delta(x)$ - функция Дирака, μ - коэффициент диффузии, t - время.

Здесь распределение концентрации вредных веществ $\theta(x, t)$, определяемое уравнением (1) и с краевыми условиями (2), (3), будет меняться со временем t и координате по x . Надо отметить, что концентрация в окрестности точки выброса будет уменьшаться, а за ее пределами – увеличиваться за счет диффузии вредных веществ в атмосфере. Из постановки задачи и второго закона Фика следует также, что функция $\theta(x, t)$ должна быть выпуклой в некоторой окрестности точки $x=0$ и вогнутой – за ее пределами, то есть функция должна иметь вид Гауссовой функции. Учитывая симметрию функции $\theta(x, t)$ относительно точки $x=0$ будем искать решение уравнения (1) в виде функции Гаусса

$$\theta(x, t) = \frac{\zeta}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \quad (4)$$

Здесь $\sigma(t)$ – дисперсия распределения $\theta(x, t)$, ζ – эмпирический коэффициент.

Подставляя выражение (4) в уравнение (1) получим следующее:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\zeta}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{\sigma'}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} + \left(\frac{1}{\sigma} + \frac{x^2 \sigma'}{\sigma^3} \right) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right] = -\frac{\zeta}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sigma'}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \left(\frac{x^2}{\sigma^2} - 1 \right) \quad (5)$$

Теперь для преобразования правой части уравнения (1), определим сначала первую производную от концентрации по координате от есть:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\zeta}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma} \left(-\frac{x}{\sigma^2} \right) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = -\frac{\zeta}{\sqrt{2\pi} \sigma^3} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \quad (6)$$

Далее дифференцируя уравнение (6) по x повторно, получим:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -\frac{\zeta}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} x \left(e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} - \frac{x^2}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right) = \frac{\zeta}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \left(\frac{x^2}{\sigma^2} - 1 \right) \quad (7)$$

Подставляя полученные производные (5), (7) в уравнение (1), получим дифференциальное уравнение для дисперсии $\sigma(t)$

$$\frac{d\sigma^2}{dt} = 2\mu \quad (8)$$

решением, которого в предположении нулевой начальной дисперсии концентрации является линейная зависимость пространственной дисперсии от времени:

$$\sigma(t)^2 = 2\mu t \quad (9)$$

С учетом (9) решение (4) переписывается в виде

$$\theta(x, t) = \frac{\zeta}{2\sqrt{\pi\mu t}} e^{-\frac{x^2}{4\mu t}}. \quad (10)$$

Учитывая, что для нормированной гауссовой функции $f(x)$ имеет место равенство $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$, выразим общую массу выброса в форме

$$M = S \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x, t) dx = S \cdot \zeta \quad (11)$$

С учетом (11) решение (10) окончательно примет вид

$$\theta(x, t) = \frac{M}{2S\sqrt{\pi\mu t}} e^{-\frac{x^2}{4\mu t}} \quad (12)$$

Как видно из (12) максимальная концентрация $\theta_{\max}$ загрязняющего вещества всегда наблюдается в точке выброса $x=0$ и убывает со временем по закону $\theta_{\max} \sim 1/\sqrt{t}$. Гауссова функция (4) является выпуклой при $|x| < \sigma$ и вогнутой при $|x| > \sigma$ (рис.1). Следовательно, концентрация загрязняющего вещества в некоторый момент времени t будет убывать в окрестности точки выброса $|x| < \sigma$ или на пространственном интервале $|x| < \sqrt{2\mu t}$, а при $|x| > \sqrt{2\mu t}$, концентрация со временем будет возрастать. Так как более 99% площади под кривой гауссова распределения приходится на интервал $|x| < 3\sigma$ почти вся масса загрязняющего вещества, будет находиться в пределах области $|x| < 3\sqrt{2\mu t}$.

Таким образом, величины $-3\sigma, 3\sigma (3\sigma = 3\sqrt{2\mu t})$ можно принять за границы области

распространения загрязнения. Из кривых рис.1,2 видно, что процесс диффузия вредных веществ вокруг источника со временем будет расти, и она подчиняется закону $\sqrt{t}$.

Полученное решение (12) одномерного уравнения диффузии для точечного источника с массой выброса $M=1$ в неподвижной среде реализовано с помощью программное средства на языке Mathematica. Распределения концентрация вредных веществ $\theta(x, t)$ в различные моменты времени для коэффициента диффузии $\mu = 1$ и для различных коэффициентов диффузии при $t=1$, рассчитанные по формуле (12), приведены на рис.1 и рис.2.

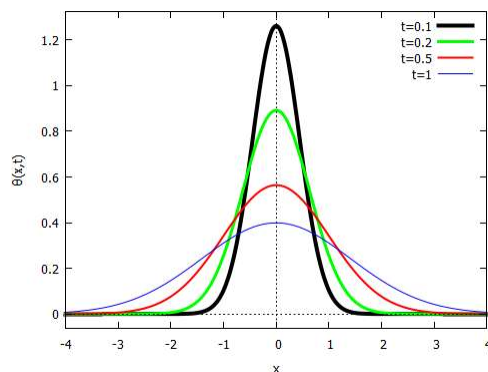


Рис. 1. Изменение концентрации аэрозольных частиц в приземном слое атмосферы.

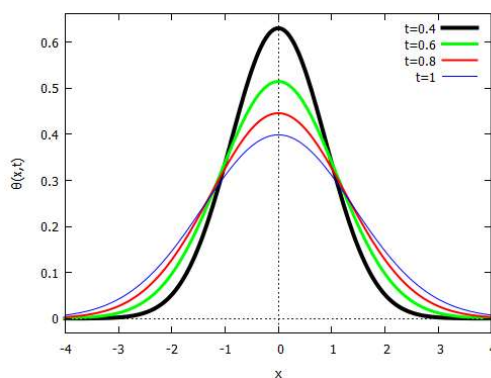


Рис. 2. Распределение $\theta(x, t)$ в атмосфере при $m=1$; $\mu = 1$.

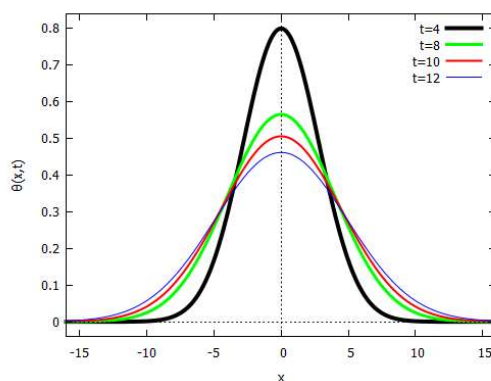


Рис. 3. Распределение $\theta(x, t)$ в атмосфере при $M = 4$; $\mu = 5$.

Численные расчеты проведены различных мощностей выброса загрязняющих веществ в атмосфере (рис.3, 4, 5). Анализ результатов расчетов показали, что с ростом мощностей источников загрязнения растет концентрация выброса вокруг источника. Поля распределения концентрации загрязняющих веществ изменяется со временем только за счет коэффициента диффузии, как видно из кривых рисунков.

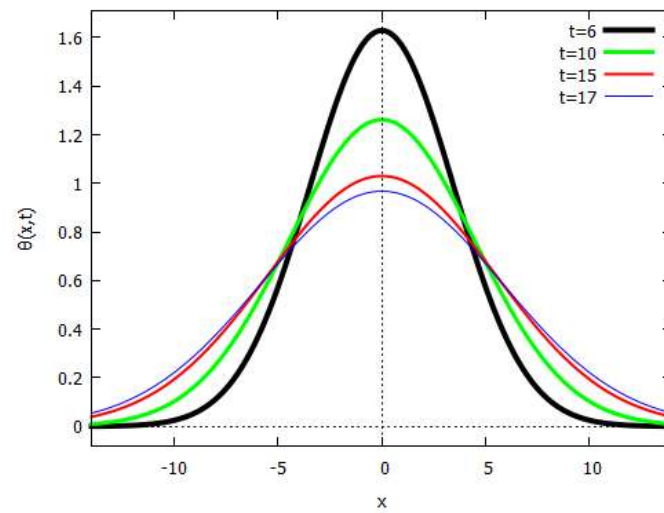


Рис. 4. Распределение $\theta(x, t)$ в атмосфере при: $M=10$; $\mu = 10$.

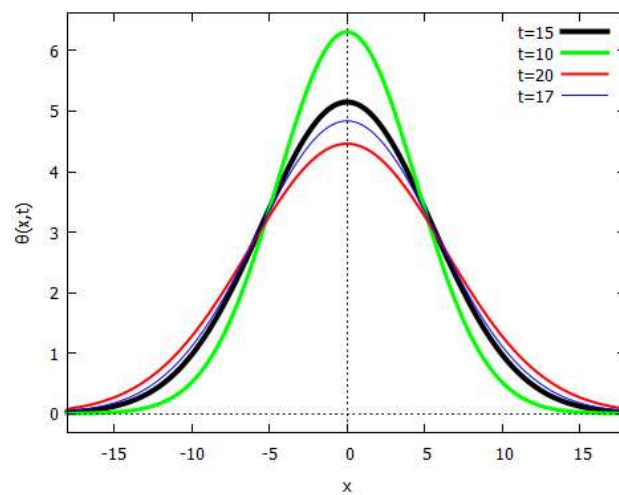


Рис. 5. Распределение $\theta(x, t)$ в атмосфере при: $M=50$; $\mu = 10$.

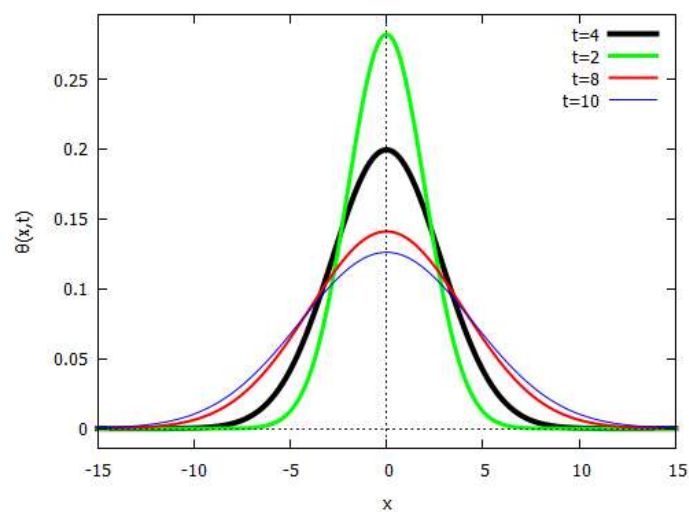


Рис.6. Распределение $\theta(x, t)$ в атмосфере при: $M=1$; $\mu = 8$

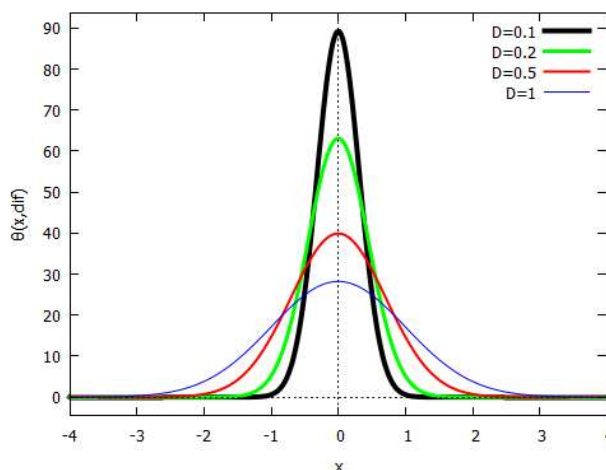


Рис.7. Распределение $\theta(x, t)$ в атмосфере при различных значениях коэффициента диффузии.

Из анализ численных расчетов и кривых рис. 7 следует, что при уменьшение значения коэффициента диффузии происходит накопление загрязняющий веществ вокруг источника.

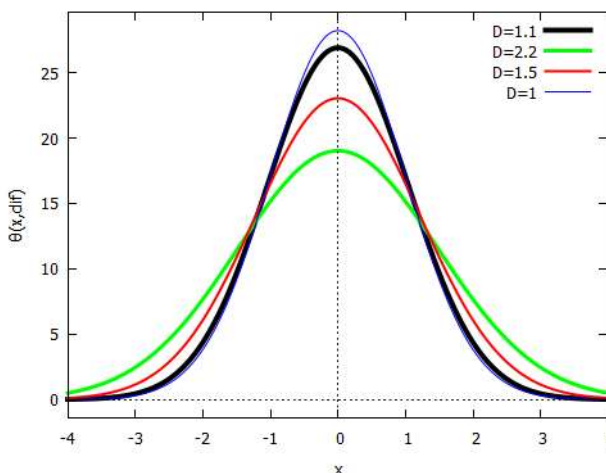


Рис. 8. Распределение $\theta(x, t)$ для различных значений коэффициента диффузии, при $t=0,5$.

Анализ проведенных численных расчетов рис. 7, 8 показали, что когда скорость воздушной массы атмосферы в рассматриваемом регионе близко к нулю, процесс распространения аэрозольных частиц в атмосфере происходит за счет диффузия их в атмосфере. С ростом коэффициента диффузии область распространения вредных загрязняющих веществ в атмосфере растет со временем, а коэффициент диффузия зависит в основном от плотности и температуры окружающей среды. При выбросе из промышленных объектов производства газообразных загрязняющих веществ, когда скорости ветра равно нулю процесс распространения существенно зависит от физико-химических свойств и плотности.

3 Двухмерная задача - процесс диффузии аэрозольных частиц в атмосфере

Рассмотрим двухмерную задачу, т.е. процесс диффузии загрязняющей вредных веществ в приземном слое атмосферы от источника выброса, когда скорость воздушного потока массы атмосферы равно нулю. ($U_x=U_y=0$) и пусть мгновенный выброс массы M загрязняющей вредных веществ расположено в точке с координатами $x=y=0$, в щели между двумя плоскостями высотой L_z , а масс выброса первоначально распределена равномерно по z так, что начальная концентрация может быть записана в виде

$$\theta(x, y, t) = M \delta(x) \delta(y) \text{ при } t=0 \quad (13)$$

Тогда математическая модель процесс диффузии загрязняющей вещество описывается с помощью уравнения

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \mu_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \mu_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (14)$$

где вдали от источника концентрация убывает до нуля, т.е. приняты условия $\theta(x, y, t) = 0$ при $t=0$ и будем считать, что процесс диффузии анизотропной, т.е. $D_x \neq D_y$.

Как нам известно, уравнению диффузия (14) в направлениях x и y зависит только от соответствующих распределений по x и y и исходя из этого решение (14) может быть представлено как произведение двух несвязанных решений, описывающих распределение по одной из координат x или y то есть:

$$\theta(x, y, t) = \theta_1(x, t) \theta_2(y, t) \quad (15)$$

Подставляя (15) в уравнение (14) получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta_1 \theta_2) = \theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial t} + \theta_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \mu_x \theta_2 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} + \mu_y \theta_1 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y^2}. \quad (16)$$

Группируя схожих членов уравнение (16) и окончательно получим:

$$\theta_2 \left[\frac{\partial \theta_1}{\partial t} - \mu_x \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} \right] + \theta_1 \left[\frac{\partial \theta_2}{\partial t} - \mu_y \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y^2} \right] = 0. \quad (17)$$

Отличительное от тривиального ($\theta_1 = \theta_2 = 0$) решение (17) может быть получено, если приравнять к нулю выражения в скобках. В этом случае для $\theta_1(x, t)$ получим:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \mu_x \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2}. \quad (18)$$

Согласно (10) решение (18) запишем в виде:

$$\theta_1(x, t) = \frac{\zeta_1}{2\sqrt{\pi\mu_x t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\mu_x t}\right) \quad (19)$$

Аналогичное выражение для θ_2 , получается из равенства нулю второй скобки (17) и общее решение (15) можно записать в следующем виде:

$$\theta(x, y, t) = \theta_1(x, t) \theta_2(y, t) = \frac{\zeta_1 \zeta_2}{4\pi t \sqrt{\mu_x \mu_y}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\mu_x t} - \frac{y^2}{4\mu_y t}\right), \quad (20)$$

где ζ_1 ζ_2 эмпирические константы.

Из условия

$$M = \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} \theta(x, y, t) dx dy \quad (21)$$

получим, что $\zeta_1 \zeta_2 = M$.

С учетом сказанной выше окончательное решение поставленной двумерной задачи можно записать в виде:

$$\theta(x, y, t) = \frac{M}{L_z 4\pi t \sqrt{\mu_x \mu_y}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\mu_x t} - \frac{y^2}{4\mu_y t}\right) \quad (22)$$

На основе полученное аналитическое решение (22) двумерного уравнения задачи диффузии загрязняющей веществ в атмосфере для случаи точечного источника с массой выброса в неподвижной среде реализовано программе на языке Maxima.

На рис.9-23 приведены результаты численных расчетов изменения концентрация загрязняющих веществ вокруг источника выброса в зависимости от основных параметров математической модели процесса в одномерной и двумерной постановке. Здесь надо подчеркивать, что распространения загрязняющих веществ происходит только за счет процесс диффузия их вокруг источника, численные расчеты проведены при различных значениях параметров: M , μ_x , μ_y , ζ_1 , ζ_2 и L_z .

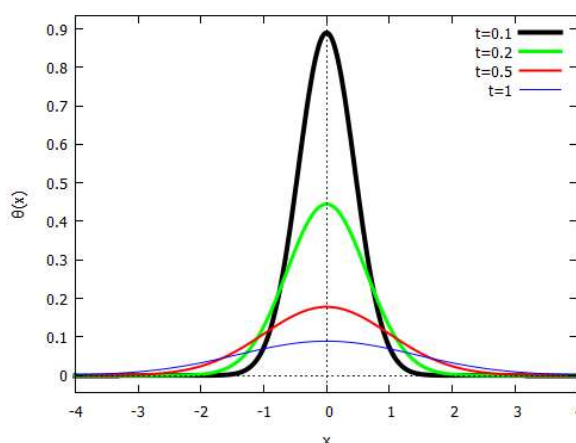


Рис. 9. Распределение концентрации загрязняющих веществ в различные моменты времени при $M=1$, $L_z=2$, $\mu_x = 1$.

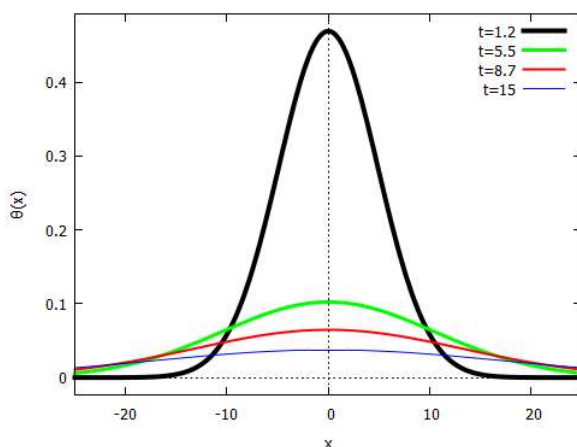


Рис. 10. Распределения $\theta(x, 0, t)$ в различные моменты времени для $M=50$, $L_z=5$, $\mu_x = 10$.

Как видно из проведенных численных расчетов (рис.9, 10) концентрация загрязняющих веществ в атмосфере со временем плавно уменьшается источниках выброса в зависимости от коэффициента диффузии. Область покрытия концентрации загрязняющих веществ расширяется со временем в зависимости от мощности источника (рис.10).

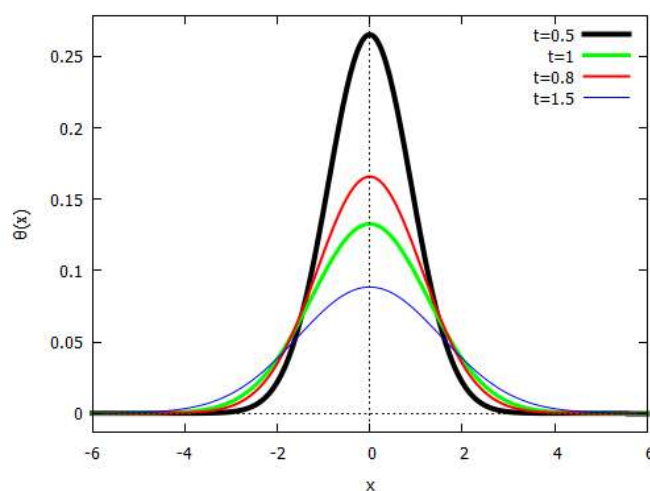


Рис. 11. Распределения $\theta(x, 0, t)$ в различные моменты времени для $M=1, L_z=1.5, \mu_x = 0.8$

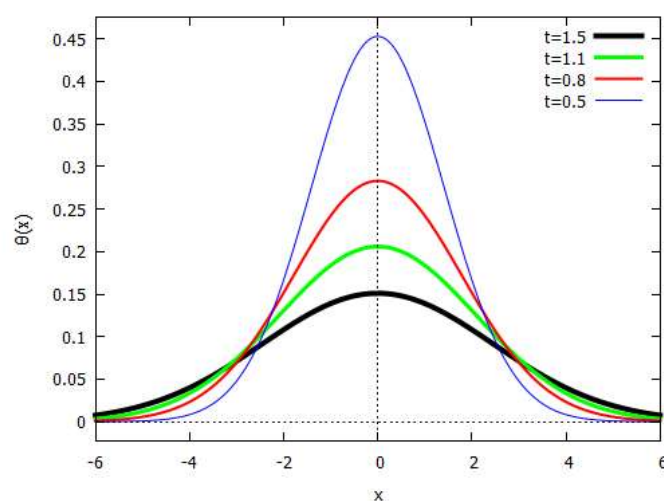


Рис. 12. Распределения $\theta(x, 0, t)$ в различные моменты времени для $M=0.9, L_z=0.5, \mu_x = 2$.

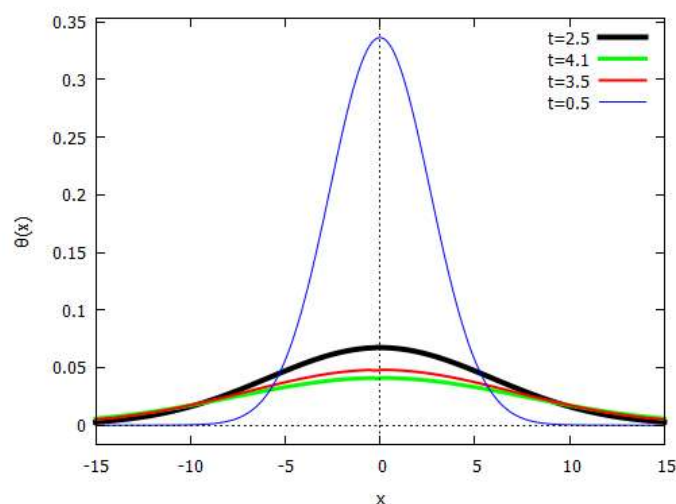


Рис. 13. Распределения $\theta(x, 0, t)$ в различные моменты времени для $M = 5, L_z = 2, \mu_x = 7$.

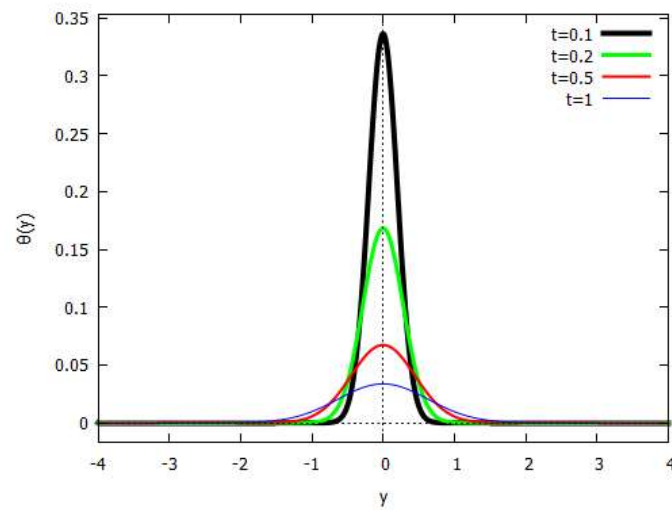


Рис. 14. Распределения $\theta(0, y, t)$ в различные моменты времени $M=1, L_z=2, \mu_y=0.2$.

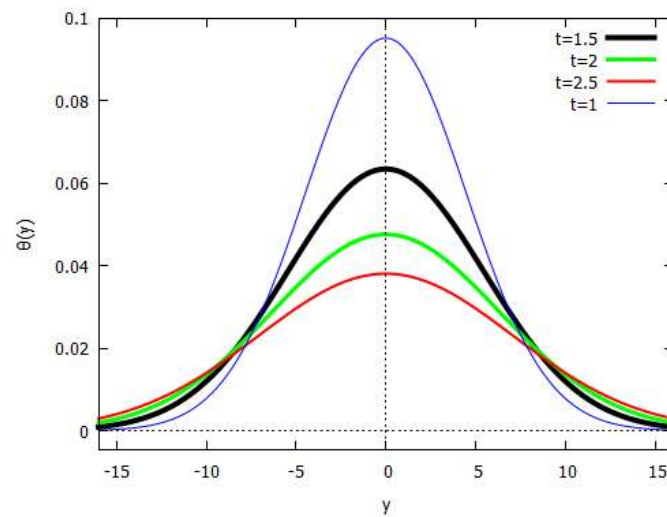


Рис. 15. Распределения $\theta(0, y, t)$ в различные моменты времени $M=50, L_z=5, \mu_y=10$.

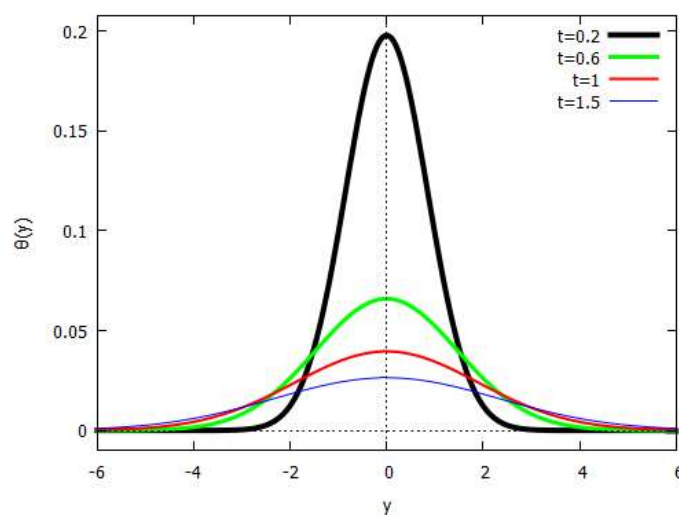


Рис. 16. Распределения концентраций загрязняющих веществ в атмосфере в различные моменты времени при $\theta(0, y, t), M=1, L_z=1.5, \mu_y=1.8$.

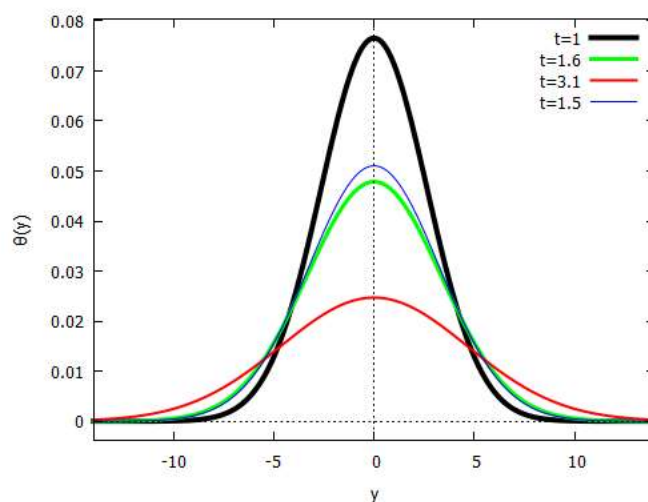


Рис. 17. Распределения концентраций загрязняющих веществ в атмосфере в различные моменты времени при $\theta(0, y, t), M=0.9, L_z=0.5, \mu_y=3.5$.

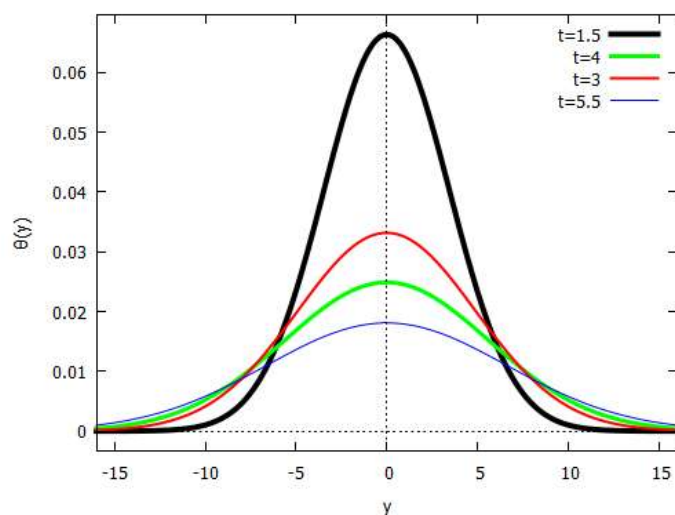


Рис. 18. Распределения концентраций загрязняющих веществ в атмосфере в различные моменты времени при $\theta(0, y, t), M=5, L_z=2, \mu_y=4$.

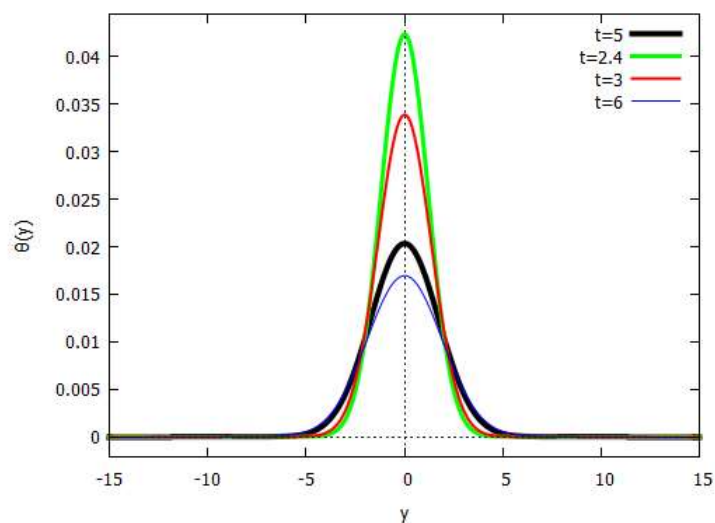


Рис. 19. Распределения концентраций загрязняющих веществ в атмосфере в различные моменты времени при: $\theta(0, y, t), M=0.7, L_z=1, \mu_y=0.3$.

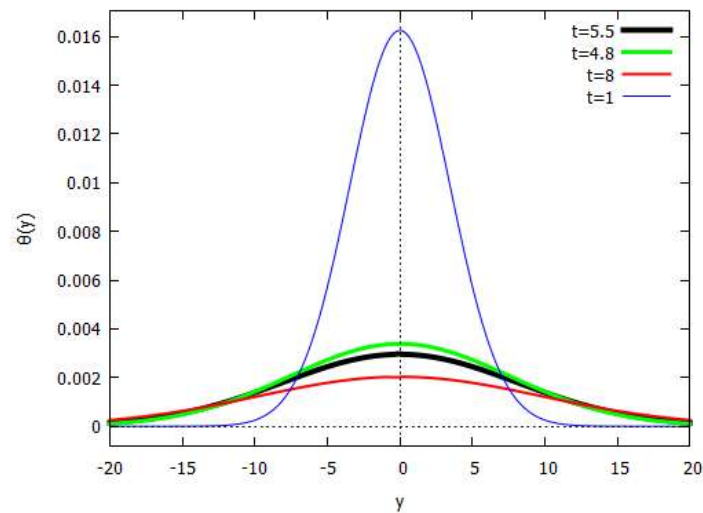


Рис. 20. Распределения концентрация загрязняющий веществ в атмосфере $\theta(0, y, t)$ в различные моменты времени при: $M=1, L_z=2, \mu_z = 6$.

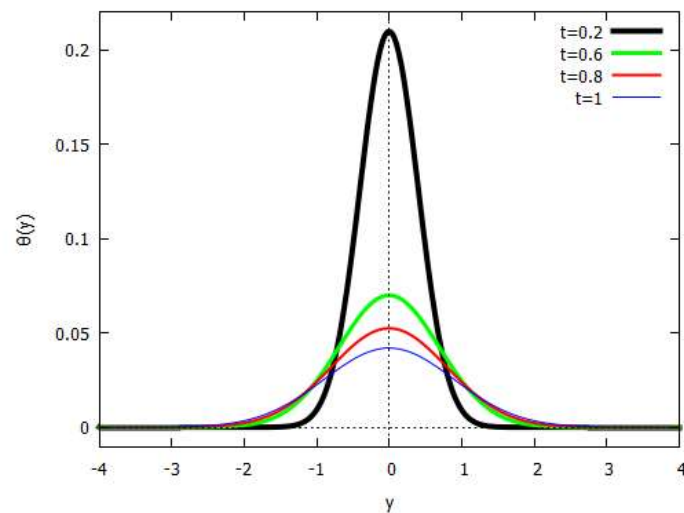


Рис. 21. Распределения концентраций загрязняющих веществ в атмосфере $\theta(0, y, t)$ в различные моменты времени при $M=1, L_z=3, \mu_z = 0,4$.

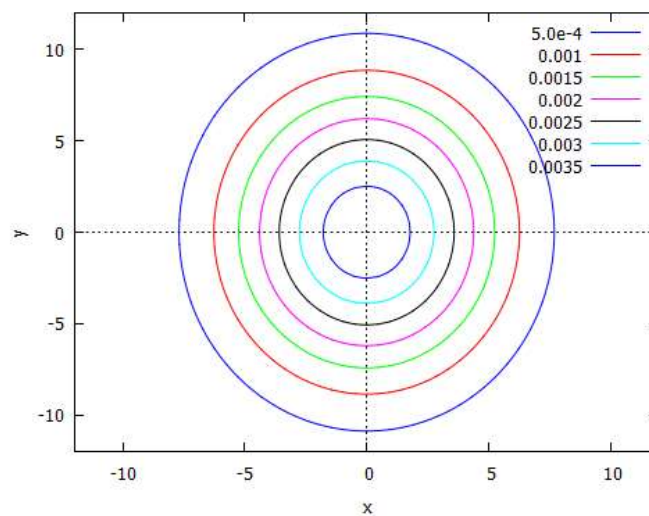


Рис. 22. Изолинии распределения концентраций загрязняющих веществ в атмосфере $\theta(x, y, t)$ при $t=2,4$.

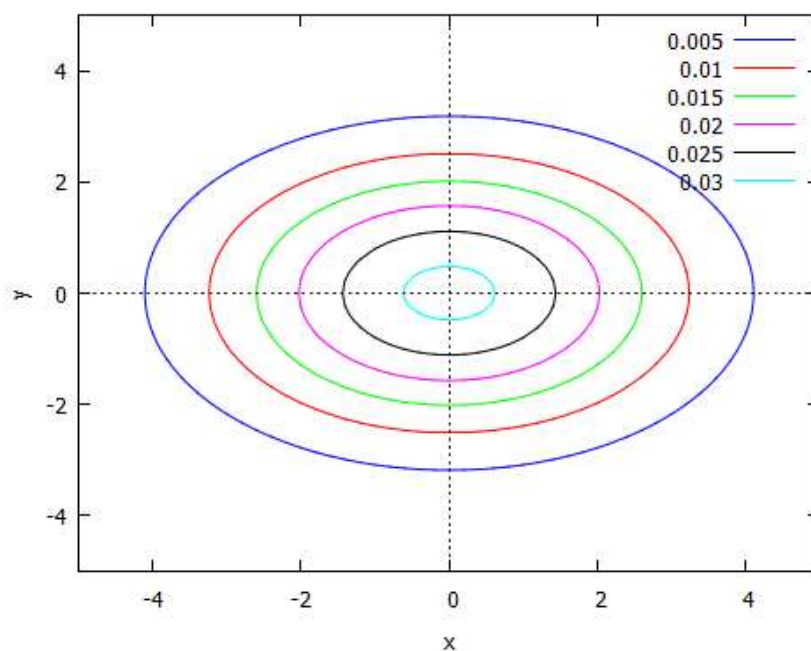


Рис. 23. Изолинии распределения концентраций загрязняющих веществ в атмосфере $\theta(x, y, t)$ при $t=4,6$.

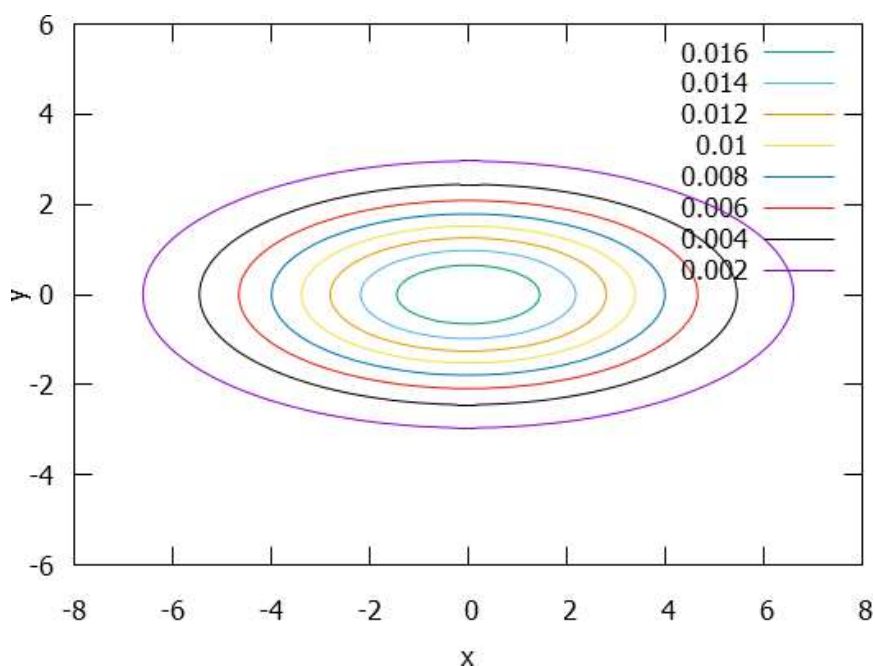


Рис. 24. Изолинии распределения концентраций загрязняющих веществ в атмосфере $\theta(x, y, t)$ при $t=5$.

Изолинии распределения $\theta(x, y, t)$ при различных значениях по времени t (рис.22-24). Из анализа численных расчетов видно, что загрязнение диффундирует в направлении x дальше, чем в направлении y и это в основном связано со значениями коэффициента диффузии по направлению оси OX и OY . Надо отметить, что распространения аэрозольных частиц и токсичных газов выброшенных из объектов производства происходит, за счет диффузии, когда наблюдается штиль и устойчивая стратификация или при нейтральной стратификации атмосферы, который характеризуется числом Ричардсона (R).

Анонсируя результатов проведенных численных расчетов можно прийти к выводу, что когда скорость воздушной массы атмосферы по осям OX и OY приравниваются к нулю, распространение аэрозольных частиц и токсичных газов в окружающей среде происходят за

счет процесса диффузии их в приземном слое атмосферы. В таких случаях область распространения аэрозольных частиц и токсичных газов изменяется по закону $\sqrt{t}$ и она существенно зависит от их размеров, массы и химических свойств, а также мощности источника выброса.

4 Выводы

Из проведенных численных расчетов видно, что процесс диффузии аэрозольных частиц и токсичных газов вокруг источника со временем будет расти, и она подчиняется закону $\sqrt{t}$.

Концентрация аэрозольных частиц и токсичных газов в некоторый момент времени t будет убывать в окрестности точки выброса $|x| < \sigma$ или на пространственном интервале $|x| < \sqrt{2\mu_x\mu_y t}$, а при $|x| > \sqrt{2\mu_x\mu_y t}$, концентрация со временем будет возрастать. Максимальная концентрация $\theta_{\max}$ загрязняющего вещества всегда наблюдается в точке выброса $x=0$ и убывает со временем по закону $\theta_{\max} \sim 1/\sqrt{t}$.

Вычислительном экспериментом установлены, что при росте коэффициента диффузии граница области распространения вредных загрязняющих веществ в атмосфере растет со временем, а коэффициент диффузия зависит в основном от плотности и температуры окружающей среды. При выбросе из промышленных объектов производства газообразных загрязняющих веществ, когда скорости ветра равно нулю процесс распространения существенно зависит от физико-химических свойств и их плотности.

Литература

- [1] Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды // Наука – 1982. – С. 320.
- [2] Берлянд М.Е. Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы // Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы – 1975.
- [3] Берешико В.В. И.Н.Б. Математические модели в экологии – 2006. – С. 68.
- [4] Машихина П. Моделирование распространения примеси в атмосфере с учетом рельефа местности. // Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна – 2009. Вип. 27 – С. 138–142.
- [5] Дымников В.П. А.А.Е. Физика атмосферы и океана // Физика атмосферы и океана – 1990. – С. 1327–1247.
- [6] Керимов А.М., Корчагина Е.А., Шаповалов А.В. В.А.Ш. Экология и природопользование о распространении атмосферных примесей в горно-степной зоне // Естественные Науки – 2007. – С. 132.
- [7] Замай С.С., Якубайлик О.Э. Модели оценки и прогноза загрязнения атмосферы промышленными выбросами в информационно-аналитической системе природоохранных служб крупного города: учеб. пособие. – 1998. – С. 109.
- [8] Сухинов А.И., Хачуни Д.С., Чистяков А.Е. Математическая модель распространения примеси в приземном слое атмосферы прибрежной зоны и ее программная реализация // Журнал вычислительной математики и математической физики – Vol. 55, No. 7. – 2015. – С. 1238–1254.
- [9] Hwang Y. Bayesian pollution source identification via an inverse physics model // Comput. Stat. Data Anal. Elsevier B.V. – Vol. 134 – 2019. – P. 76–92.
- [10] Израэль Ю.А., Назаров И.М., Прессман А.Я., Ровинский Ф.Я., Рябошапка А.Г. Ф.Л.М. Кислотные дожди. – 1983. – С. 206.

- [11] *Ярцева Е. П.* Разработка и численные исследования рекурсивно-итерационных методов и алгоритмов в задаче моделирования переноса примесей в атмосфере. // Северо-Кавказский федеральный университет – 2016. – С. 1–23.
- [12] *Karroum K.* Algorithmes d'optimisation pour la surveillance et l'estimation de la pollution de l'air – 2021. – P. 132.
- [13] *Agarwal M., Tandon A.* Modeling of the urban heat island in the form of mesoscale wind and of its effect on air pollution dispersal // Appl. Math. Model. Elsevier Inc. – 2010. – Vol. 34, № 9 – P. 2520–2530.
- [14] *Заринов Ш.Х., Абзалилов Д.Ф.* К.Е.А. Задачи математической экологии и пакет Maxima Учебное пособие // Казань: Изд-во Казанского федерального университета – 2015. – P. 120.
- [15] *Равшанов Н., Нарзуллаева Н., Мурадов Ф., Назаров Ш.Э.* Моделирование процесса распространения активных аэрозольных частиц в пограничном слое атмосферы // Hisoblash va amaliy Mat. muammolari – 2021. – С. 164.
- [16] *Равшанов Н., Шафиев Т., Назаров Ш.* Разработка математической модели и программного комплекса для прогнозирования концентрации вредных веществ в атмосфере // Scientific collection “Interconf.” – 2021. – С. 186.
- [17] *Хамдамов Р.Х., Равшанов З.Н., Таштемирова Н. Н.* Моделирование и исследование основных параметров в процессе распространения соле-пылевых частиц в атмосфере // Проблемы вычислительной и прикладной математики – 2020. – Vol. 2, № 26 – С. 78–98.
- [18] *Равшанов Н., Шафиев Т.Р.* Б.Ф.У. Математическая модель, численный алгоритм и программный комплекс для мониторинга и прогнозирования концентрации вредных веществ в атмосфере // Современное состояние и перспективы применения цифровых технологий и искусственного интеллекта в управлении республиканской научно-технической конференции. Ташкент – 2021. – С. 315–324.

Поступила в редакцию 13.04.2022

UDC 519

STUDY OF THE MAIN PARAMETERS OF THE PROCESS OF DIFFUSION OF HARMFUL SUBSTANCES IN THE ATMOSPHERE

^{1}Ravshanov N., ²Nazarov Sh., ³Rasulmukhammedov A.*

*ravshanzade-09@mail.ru

¹Research Institute for the Development of Digital Technologies
and artificial intelligence,
100124, 17A Buz-2, Mirzo-Ulugbek district, Tashkent, Uzbekistan;

²Bukhara State University,
705018, 11 Muhammad Ikbol str., Bukhara, Uzbekistan;

³Tashkent State Transport University,
100067, str. Adilkhodjaeva, 1, Tashkent, Uzbekistan.

To study the main parameters of the process of diffusion of polluted aerosol particles and carbon dioxide in the surface layer of the atmosphere, numerical calculations were carried out using the obtained analytical solution of one-dimensional and two-dimensional problems for various values of the diffusion coefficient, the mass of emissions from multi-vein point sources. From the analysis of the numerical calculations carried out, it was established that the

process of diffusion of aerosol particles and toxic gases around the source will increase with time, and it obeys the square root law in time. The maximum concentration $\theta_{\max}$ of a pollutant is always observed at the point of release and decreases with time according to the law $1/\sqrt{t}$ and numerical calculations have established that with an increase in the diffusion coefficient, the boundary of the area of distribution of harmful pollutants in the atmosphere increases with time. When gaseous pollutants are emitted from industrial production facilities and the wind speed is zero, the propagation process depends significantly on the physical and chemical properties and their density.

Keywords: mathematical model, analytical solution, process of diffusion of harmful substances, numerical algorithm.

Citation: Ravshanov N., Nazarov Sh., Rasilmukhammedov A. 2022. Study of the main parameters of the process of diffusion of harmful substances in the atmosphere // *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 2/1(40): 174-191.