PEDAGOGIKMAHORAT*ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ МАСТЕРСТВО*PEDAGOGICALSKILL

ISSN 2181-6883

PEDAGOGIK MAHORAT

Ilmiy-nazariy va metodik jurnal

MAXSUS SON
(2020-yil, iyun)

Jurnal 2001-yildan chiqa boshlagan

Buxoro – 2020

PEDAGOGIK MAHORAT

Ilmiy-nazariy va metodik jurnal
2020, Maxsus son

Jurnal Oʻzbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi OAK Rayosatining 2016-yil 29-dekabrdagi qarori bilan **pedagogika** va **psixologiya** fanlari boʻyicha dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim boʻlgan zaruruiy nashrlar roʻyxatiga kiritilgan.

Jurnal 2001-yilda tashkil etilgan.

Jurnal 1 yilda 6 marta chiqadi.

Jurnal Oʻzbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2016-yil 22-fevral № 05-072-sonli guvohnoma bilan roʻyxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti
Tahririyat manzili: Oʻzbekiston Respublikasi,Buxoro shahri Muhammad Iqbol koʻchasi, 11-uy
Elektron manzil: ped_mahorat@umail.uz

ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ МАСТЕРСТВО
Научно-теоретический и методический журнал

2020, специальный выпуск

Журнал включен в список обязательных выпусков ВАК при Кабинете Министров Республики Узбекистан на основании Решении ВАК от 29 декабря 2016 года для получения учёной степени по **педагогике** и **психологии**.

Журнал основан в 2001г.
Журнал выходит 6 раза в год
Журнал зарегистрирован Бухарским управлением агентства по печати и массовой коммуникации Узбекистана.
Свидетельство о регистрации средства массовой информации № 05-072 от 22 февраля 2016 г.
Учредитель: Бухарский государственный университет
Адрес редакции: Узбекистан, г. Бухара, ул. Мухаммад Икбол, 11.
e-mail: ped_mahorat@umail.uz

ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА НОРМА ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ В ПРОСТРАНСТВЕ $\overline{L}_2^m(K_n)$.

Озоджон ЖАЛОЛОВ
БухГУ, доцент кафедры
«Информационные технологии»

В настоящей работе получена верхняя оценка норма функционала погрешности кубатурных формул в пространстве $\overline{L}_2^m(K_n)$. Такая же оценка ранее была получена для нормы функционала погрешности кубатурной формулы (1) над фактор пространством С.Л.Соболева $L_2^{(m)}(K_n)$ и в результате мы получим одинаковый порядок сходимости к нулю при $N \to \infty$, но хотя норма функции определена разными.

Ключевые слова: *кубатурная формула, весовая кубатурная формула, обобщённая функция, функционалом погрешности.*

In this paper in the space $\overline{L}_2^m(K_n)$ received an upper estimate for the norm of the error functional of cubature formulas. The same estimate was previously obtained for the norm of the error functional of the cubature formula (1) over the factor space of S. L. Sobolev $L_2^{(m)}(K_n)$ and as a result we get the same order of convergence to zero for $N \to \infty$, but although the norm of the function is defined different.

Key words: *cubature formula, weight cubature formula, generalized function, functional errors.*

Современная постановка проблемы оптимизации формул приближённого интегрирования заключается в минимизации нормы функционала погрешности формулы на выбранных нормированных пространствах, например [1] – [4].

В этих работах исследуется проблема оптимальности относительно некоторого определённого пространства. Большинство из них рассмотрены в пространстве Соболева [1]. Многомерные кубатурные формулы отличаются от одномерных двумя особенностями:

1) бесконечно разнообразны формы многомерных областей интегрирования;

2) быстро растёт число узлов интегрирования с увеличением размерности пространства. Проблема 2) требует особого внимания к построению наиболее экономных формул.

В настоящей работе рассматриваются формулы именно с учётом этого требования. Как известно, что выражением Н.С. Бахвалова такие формулы называется “практичные формулы” [5]

Пусть $B(\Omega)$ - пространство Банаха, компактно вложенное в $C(\Omega)$, $B^*(\Omega)$ сопряжённое к $B(\Omega)$ пространство. Интеграл от функции по области Ω:

$$\int_\Omega f(x)dx = \int \varepsilon_\Omega(x) f(x) dx$$

является линейным функционалом над ***B***. Его приближённое выражение

$$\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda f\left(x^{(\lambda)}\right) = \int_\Omega \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda \delta\left(x - x^{(\lambda)}\right) f(x)dx$$

будет некоторым другим функционалом.

Линейным функционалом является и погрешность кубатурной формулы.

$$\int \varepsilon_\Omega(x) f(x)dx - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda f\left(x^{(\lambda)}\right) = \int \left[\varepsilon_\Omega(x) - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda \delta\left(x - x^{(\lambda)}\right)\right] f(x)dx = <\ell(x), f(x)$$

где $\ell(x) = \varepsilon_\Omega(x) - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda \delta\left(x - x^{(\lambda)}\right)$ - обобщённая функция которая называется функционалом погрешности кубатурной формулы

$$\int_{\Omega} f(x)dx \approx \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda f\left(x^{(\lambda)}\right)$$

и $\delta(x)$ - функция Дирака, $\varepsilon_\Omega(x)$ - индикатор области Ω.

c_λ и $x^{(\lambda)}$ - коэффициенты и узлы кубатурной формулы.

В настоящей работе рассмотрим кубатурную формулу

$$\int_{K_n} f(x)dx \approx \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda f\left(x^{(\lambda)}\right) \tag{1}$$

над пространством $\overline{L}_2^{(m)}(K_n)$, где K_n - n - мерный единичный куб.

Кубатурной формулы (1) сопоставим обобщённую функцию

$$\ell_N(x) = \varepsilon_{K_n}(x) - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda \delta\left(x - x^{(\lambda)}\right), \tag{2}$$

и назовём её функционалом погрешности.

Определение. Пространства $\overline{L}_2^{(m)}(K_n)$ - определяется как пространство функций заданных на n - мерном единичном кубе.

K_n и имеющих обобщённые производные порядка m, суммируемые с квадратом в норме

$$\left\| f(x) / \overline{L}_2^{(m)}(K_n) \right\| = \left\{ \int_{K_n} \left(\frac{\partial^m f(x)}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \ldots \partial x^{m_n}} \right)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

со скалярным произведением

$$\left(f(x), \varphi(x) \right) \overline{L}_2^{(m)}(K_n) = \int_{K_n} \left(\frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m} \right) \left(\frac{\partial^m \varphi(x)}{\partial x^m} \right) dx,$$

где $\partial x^m = \partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \ldots \partial x_n^{m_n} \quad m = m_1 + m_2 + \ldots m_n, dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$.

Как известно [1], что норма функции в пространстве $L_2^{(m)}(K_n)$ - определяется формулой:

$$\left\| f(x) / \overline{L}_2^{(m)}(K_n) \right\| = \left\{ \int_{K_n} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left(D^{|\alpha|} f(x) \right)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

где $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \ldots \alpha_n!$ и $D^{|\alpha|} f(x) = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Пусть в (4) положим $n = 2$ и $m = 2$, тогда отсюда получим, что

$$\int_{K_\alpha} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left(\frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m} \right)^2 dx = \int_{K_2} \sum_{\alpha_1+\alpha_2=2} \frac{2!}{\alpha!\alpha_2!} \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \right)^2 dx =$$

$$= \int_{K_2} \left[\left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} \right)^2 + \frac{2!}{1! \cdot 1!} \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} \right)^2 dx \right]. \tag{5}$$

При $n = 2$ и $m = 2$ равенство (3) принимает следующий вид

$$\left\| f(x) / \overline{L}_2^{(2)}(K_n) \right\|^2 = \int_{K_2} \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2}} \right)^2 dx. \tag{6}$$

Очевидно, что для правая часть (6) меньше вычислений чем (5) и отсюда следует, что для нормы функции в пространстве $\overline{L}_2^{(m)}\left(K_2\right)$ количество вычислительных операций будет гораздо меньше чем в пространстве $L_2^{(2)}\left(K_2\right)$, так как в норме (6) участвует только смешенные производные.

Теперь докажем следующую теорему который является основным результатом.

<u>**Теорема.**</u> Если для функционала погрешности (2) весовой кубатурной формулы (1) над пространством $\overline{L}_2^{(m)}\left(K_n\right)$ выполняется условие

$$\ell_N\left(x\right)=\ell_{N_1}\left(x_1\right)\cdot\ell_{N_2}\left(x_2\right)\cdot\ldots\cdot\ell_{N_n}\left(x_n\right)$$

и

$$\left\|\ell_{N_i}\left(x_i\right)/\overline{L}_2^{(m_i)}\left(0,1\right)\right\|\le c_i\,\frac{1}{N_i^{m_i}},\quad c_i-\text{ константы,}\tag{7}$$

т.е.

$$\left\|\ell_{N_i}\left(x_i\right)/\overline{L}_2^{(m_i)^*}\left(0,1\right)\right\|\le c_iO\left(h^{m_i}\right),\quad c_i-\text{ константы,}\left(i=\overline{1,n}\right),\tag{8}$$

то

$$\left\|\ell_N\left(x\right)/\overline{L}_2^{(m)^*}\left(K_n\right)\right\|\le c\cdot\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}N_i^{m_i}},\ c-\text{константа,}\tag{9}$$

или

$$\left\|\ell_N\left(x\right)/\overline{L}_2^{(m)^*}\left(K_n\right)\right\|\le c\cdot O\left(h^m\right)\tag{10}$$

где $\quad\ell_{N_i}\left(x_i\right)=\varepsilon_{K_i}\left(x_i\right)-\sum\limits_{\lambda_i=1}^{N_i}c_{\lambda_i}\delta\left(x_i-x_i^{(\lambda_i)}\right)$

$c=\prod\limits_{i=1}^{n}c_i,\qquad m=m_1+m_2+\ldots+m_n$ и m_i - произвольны $\left(i=\overline{1,n}\right)$ т.е. $0\le m_i\le m$

Доказательство ведём методом математической индукции.

Пусть $n=2$, тогда

$x=\left(x_1,x_2\right),\qquad \left|\alpha\right|=\alpha_1+\alpha_2,\qquad m=m_1+m_2,\qquad dx=dx_1dx_2,\qquad f\left(x\right)=f\left(x_1,x_2\right),$
$\ell_N\left(x\right)=\ell_{N_1}\left(x_1\right)\cdot\ell_{N_2}\left(x_2\right).$

Если полагать в (3) $n=1$ то, получим

$$\left\|f\left(x_i\right)/\overline{L}_2^{(m_i)}\left(0,1\right)\right\|=\left\{\int\limits_0^1\left(\frac{\partial^{m_i}f\left(x_i\right)}{\partial x_i^{m_i}}\right)^2dx_i\right\}^{\frac{1}{2}},\quad\left(i=\overline{1,n}\right).$$

Таким образом, имеем

$$\begin{gathered}\left|<\ell_N\left(x_1,x_2\right),f\left(x_1x_2\right)>\right|=\left|<\ell_{N_2}\left(x_1\right),f\left(x_1,x_2\right)>\right|\le\\ \left\|\ell_{N_2}\left(x_2\right)/\overline{L}_2^{(m_2)^*}\left(0,1\right)\right\|\cdot\left\|<\ell_{N_1}\left(x_1\right),f\left(x_1,x_2\right)>/\overline{L}_2^{(m_2)^*}\left(0,1\right)\right\|\end{gathered}\tag{11}$$

Вычислим следующую норму:

$$\left\|<\ell_{N_1}\left(x_1\right),f\left(x_1.x_2\right)>/L_2^{(m_2)}\left(0,1\right)\right\|=\left\{\int\limits_0^1\left|\frac{\partial^{m_2}}{\partial x_2^{m_2}}<\ell_{N_1}\left(x_1\right),f\left(x_1,x_2\right)>\right|^2dx_2\right\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$= \left\{ \int_0^1 \left| < \ell_{N_1}(x_1), \frac{\partial^{m_2}}{\partial x_2^{m_2}} f(x_1, x_2) > \right|^2 dx_2 \right\}^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left\{ \int_0^1 \left[\left\| \ell_{N_1}(x_1) \Big/ \overline{L}_2^{(m_1)^*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \frac{\partial^{m_2}}{\partial x_2^{m_2}} f(x_1, x_2) \Big/ \overline{L}_2^{(m_1)}(0,1) \right\| \right]^2 dx_2 \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\| \ell_{N_1}(x_1) \Big/ \overline{L}_2^{(m)^*}(0,1) \right\| \cdot \left\{ \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \left[\frac{\partial^{m_1+m_2}}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2}} f(x_1, x_2) \right]^2 dx_1 \right\} dx_2 \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\| \ell_{N_1}(x_1) \Big/ \overline{L}_2^{(m_1)^*}(0,1) \right\| \cdot \left\| f(x) \Big/ \overline{L}_2^{(m)}(K_2) \right\|, \text{ где } x = (x_1, x_2) \text{ и } m = m_1 + m_2. \tag{12}$$

Таким образом, из (11) и (12) получим

$$\left| < \ell_N(x_1, x_2), f(x_1, x_2) > \right| \le \left\| \ell_{N_2}(x_2) \Big/ \overline{L}_2^{(m_2)^*}(0,1) \right\| \cdot$$

$$\cdot \left\| \ell_{N_1}(x_1) \Big/ \overline{L}_2^{(m)^*}(0,1) \right\| \cdot \left\| f(x) \Big/ \overline{L}_2^{(m)}(K_2) \right\|, \tag{13}$$

Имея в виду (3) из (13) получим

$$\left\| \ell_N(x) \Big/ \overline{L}_2^{(m)^*}(K_2) \right\| \le \left\| \ell_{N_1}(x_1) \Big/ \overline{L}_2^{(m_1)^*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \ell_{N_2}(x_2) \Big/ \overline{L}_2^{(m_2)^*}(0,1) \right\|, \tag{14}$$

Учитывая (7) из (14) имеем

$$\left\| \ell_N(x) \Big/ \overline{L}_2^{(m)^*}(K_2) \right\| \le d_1 \cdot d_2 \cdot \frac{1}{N_1^{m_1} \cdot N_2^{m_2}}$$

т.е.

$$\left\| \ell_N(x) \Big/ \overline{L}_2^{(m)^*}(K_2) \right\| \le d_3 O\left(h^{m_1}\right) \cdot O\left(h^{m_2}\right), \tag{15}$$

где $d_3 = d_1 \cdot d_2$

При $n = k$ имеем [6]

$$\left| < \ell_N(x), f(x) > \right| = \left| < \ell_N(x_1, x_2, ..., x_k), f(x_1, x_2, ..., x_n) > \right| =$$

$$\left| < \ell_{N_k}(x_k), < \ell_{N_{k-1}}(x_{k-1}), ... < \ell_{N_2}(x_2), < \ell_{N_1}(x_1), f(x_1, x_2, ..., x_k) >, ..., > \right| \le$$

$$\le \left\| \ell_{N_k}(x_k) \Big/ \overline{L}_2^{(m_k)^*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \ell_{N_{k-1}}(x_{k-1}) \Big/ \overline{L}_2^{(m_{k-1})^*}(0,1) \right\| ...$$

$$\cdot \left\| \ell_{N_1}(x_1), f(x_1, x_2, ..., x_k) \Big/ \overline{L}_2^{(m_1)^*}(0,1) \right\| \le$$

$$\le \left\| \ell_{N_k}(x_k) \Big/ \overline{L}_2^{(m_k)^*}(0,1) \right\| ... \left\| \ell_{N_1}(x_1) \Big/ \overline{L}_2^{(m_1)^*}(x_1) \right\| . \left\| f(x) \Big/ \overline{L}_2^{(m)}(K_k) \right\|. \tag{16}$$

Из (16) учитывая (3) имеем

$$\left\| \ell_N(x) \Big/ \overline{L}_2^{(m)^*}(K_k) \right\| \le \left\| \ell_{N_1}(x_1) \Big/ \overline{L}_2^{(m_1)^*}(0,1) \right\| ... \left\| \ell_{N_k}(x_k) \Big/ \overline{L}_2^{(m_k)^*}(0,1) \right\| \tag{17}$$

Тогда имея в виду (7) из (17) получим

$$\left\| \ell_N(x) \Big/ \overline{L}_2^{(m)^*}(K_k) \right\| \le d \frac{1}{N_1^{m_1} \cdot N_2^{m_2} ... N_k^{m_k}} \tag{18}$$

или учитывая (8) из (18) имеем

$$\left\| \ell_N(x) \Big/ \bar{L}_2^{(m)^*}(K_k) \right\| \le d \cdot O\left(h^{m_1}\right) \dots O\left(h^{m_k}\right), \qquad \text{где } d = \prod_{i=1}^{k} d_i$$

Используя из справедливость утверждения теорема при $n = k$ докажем, что утверждение выполняется при $n = k + 1.$ Таким образом, пусть $n = k + 1$, тогда учитывая (3) из (17) имеем

$$\left| < \ell_{N_{k+1}}\left(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}\right), f\left(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}\right) > \right| =$$

$$= \left| < \ell_{N_1}\left(x_1\right), < \ell_{N_2}\left(x_2\right), <, \dots < \ell_{N_k}\left(x_k\right), < \ell_{N_{k+1}}\left(x_{k+1}\right), f\left(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}\right) > \dots > \right| \le$$

$$\le \left\| \ell_{N_1}\left(x_1\right) \Big/ \bar{L}_2^{(m_1)^*}(0,1) \right\| \dots \left\| \ell_{N_k}\left(x_k\right) \Big/ \bar{L}_2^{(m_k)^*}(0,1) \right\| \cdot$$

$$\left\| < \ell_{N_{k+1}}\left(x_{k+1}\right), f\left(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}\right) > \Big/ \bar{L}_2^{(m_{k+1})}(0,1) \right\| \tag{19}$$

Имея в виду (3) и (17) из (19) получим

$$\left\| \ell_N(x) \Big/ \bar{L}_2^{(m)^*}(K_{k+1}) \right\| \le \left\| \ell_{N_1}\left(x_1\right) \Big/ \bar{L}_2^{(m_k)^*}(0,1) \right\| \dots$$

$$\cdot \left\| \ell_{N_k}\left(x_k\right) \Big/ \bar{L}_2^{(m_k)^*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \ell_{N_{k+1}}\left(x_{k+1}\right) \Big/ \bar{L}_2^{(m_{k+1})^*}(0,1) \right\|, \tag{20}$$

Используя (7) из (20) имеем

$$\left\| \ell_N(x) \Big/ \bar{L}_2^{(m)^*}(K_{k+1}) \right\| \le d \frac{1}{N_1^{m_1} \cdot N_2^{m_2} \dots N_{k+1}^{m_{k+1}}}, \tag{21}$$

или учитывая (15) и (21) получим

$$\left\| \ell_N(x) \Big/ \bar{L}_2^{(m)^*}(K_{k+1}) \right\| \le d \cdot O\left(h^{m_1}\right) \dots O\left(h^{m_{k+1}}\right), \qquad \text{где } d = \prod_{i=1}^{k+1} d_i .$$

В заключение отметим, что таким образом получим неравенство (9) и (10),
т.е.

$$\left\| \ell_N(x) \Big/ \bar{L}_2^{(m)^*}(K_n) \right\| \le d \frac{1}{N_1^{m_1} \cdot N_2^{m_2} \dots N_n^{m_n}}, \qquad d - \text{константа.} \tag{22}$$

Или учитывая (8) из (22) имеем

$$\left\| \ell_N(x) \Big/ \bar{L}_2^{(m)^*}(K_n) \right\| \le d \cdot O\left(h^{m_1}\right) \dots O\left(h^{m_n}\right) \tag{23}$$

где $d = \prod_{i=1}^{n} d_i$. Так как $O\left(h^{m_1}\right) \dots O\left(h^{m_n}\right) = O\left(h^{m_1 + m_2 + \dots + m_n}\right) = O\left(h^m\right),$ то из (23) получим

$$\left\| \ell_N(x) \Big/ \bar{L}_2^{(m)^*}(K_n) \right\| \le d \cdot O\left(h^m\right), \quad d - \text{константа,} \tag{24}$$

что и требовалось доказать.

Таким образом мы получили оценку сверху для нормы функционала погрешности (2) кубатурной формулы (1) в пространстве $\bar{L}_2^{(m)^*}\left(K_n\right)$.

Такая же оценка ранее была получена для нормы функционала погрешности кубатурной формулы (1) над фактор пространством С.Л.Соболева $L_2^{(m)}\left(K_n\right)$ и в результате мы получим одинаковый порядок сходимости к нулю при $N \to \infty$, но хотя норма функции определена разными, это подтверждается неравенством (24).

Список литературы

1. Жалолов О.И, С.И.Ибрагимов, Б.Р.Абдуллаев. Оценка погрешности кубатурных формул общего вида над фактор- пространством Соболева // WORLD Science "Topical researches of the World science" —June 20 – 21, 2015, —Dubai, UAE).
2. Жалолов О.И, Косимов А.А. Оптимальные по порядку сходимости весовые кубатурные формулы типа Эрмита в пространстве $\overline{L}_2^m(K_n)$ // Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2015. -№3. -С.24- 33.
3. Жалолов О.И. Вычисление нормы функционала погрешности оптимальных интерполяционных формул в пространстве периодических функций С.Л.Собовева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$. Проблемы вычислительной и прикладной математики. // Научный журнал. -№2.-2015 декабр.- Ташкент.-53-58ст.
4. Жалолов О.И., Г.А.Акмалова. Оптимальные по порядку сходимости весовые кубатурные формулы в пространстве Соболева // «ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ». Материалы IX Международной научно-практической конференции. -Том 1. 11 марта 2015 г., -Россия, г. -Санкт-Петербург. -182-191ст.
5. Шадиметов Х. М, Жалолов О.И, Шадманова К.У., Шамсиев Ж. Ш. Оптимальные по порядку сходимости весовые кубатурные формулы типа Эрмита в пространстве Соболева // East European Scientific Journal. Wydrukowano w «Aleje Jerozolimskie . 85/21, 02-001 Warszawa, Polska». -2016. -162ст.
6. Жалолов О.И, И.Ф. Жалолов. Об одной асимптотической оптимальной кубатурной формуле // «Молодой учёный» Международный научный журнал. г.Казань. -№ 10 (114) . Май, -2016 г.
7. Шадиметов ХМ., Жалолов О.И. Вычисление нормы функционала погрешности и построение оптимальных по порядку сходимости весовых кубатурных формул типа Эрмита в пространстве Соболева // Проблемы вычислительной и прикладной математики. Научный журнал. -№1.2016 март. -Ташкент. -100-106 ст.
8. Жалолов О.И. Об одной весовой оптимальной по порядку сходимости кубатурной формуле в пространстве $L_p^{(m)}(K_n)$ // «Молодой учёный» Международный научный журнал. г. Казань. -№ 13 (117) . -Июль, -2016 г.
9. Жалолов О.И., Абдуллаев Б.Р. Построение оптимальных квадратурных формул типа Эрмита в пространстве периодических функций С.Л.Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_n)$. // «Молодой учёный» Международный научный журнал. -г.Казань. -№ 11 (145) . февраль, -2017 г.
10. Жалолов О.И., Бобоpахимова М. И. Алгоритм построения дискретного аналога одного оператора $D_4[\beta]$ // «Молодой учёный» Международный научный журнал. -г.Казань. -№ 11 (145) . февраль, -2017 г.
11. Жалолов О.И. Верхная оценка нормы функционала погрешности кубатурной формуы типа Эрмита в пространстве С.Л.Соболева // Проблемы вычислительной и прикладной математики. Научный журнал. -№3.2017. -Ташкент. -70-78 ст.
12. Жалолов О.И. О существовании наилучших кубатурных формул общего вида над пространством С.Л.Соболева // Universum:технические науки: электрон. научн. журн. 2020. № 11(80).
13. OI Jalolov, KU Khayatov. Top evaluation for the rate of functional of error weight cubature formula in space // Scientific reports of Bukhara State University. 2020. №3(4),.32-37p
14. Жалолов О.И. Наилучшая весовая кубатурная формула над пространством С.Л.Соболева // Сибирский федеральный университет. 2011г.
15. З.Ш. Жумаев, О.И. Жалолов. Анализ алгебраических моделей коэффициента турбулентной вязкости при исследовании круглых турбулентных струй реагирующих газов // Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании. Усть-Каменогорск, Казахстан.2003г. 11-14ст.

16. Хаятов Х. У., Жураева Л. И., Жураев З. Ш. Основные понятия теории нечетких множеств // Молодой ученый. — 2019. — № 25 (263). — С. 41-44.
17. Хаятов Х.У, Жалолова Н.Х. О нахождении нормы функционала погрешности интерполяционных формул типа эрмита в периодическом пространстве // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2017. — № 4 (10). — С. 98-103.
18. Хаятов, Х. У. Оценка погрешности кубатурных формул общего вида над фактор-пространством Соболева// Молодой ученый. — 2016. — № 13 (117). — С. 58-60.
19. Хаятов Х.У. Некоторые вопросы теоремы вложения в классах периодических обобщенных функций в пространств // Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии — 2016. — № 4 (32). — С. 51-57.
20. Хаятов Х.У., Очилова Н.Т. Об одном погрешности весовых кубатурных формул в Пространстве $\tilde{C}^{(m)}T_n$ // Сибирский федеральный университет. — 2011.
21. Хаятов Х.У. Об одной погрешности весовых кубатурных формул в пространстве // Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии — 2016. — № 4 (32). — С. 58-62.
22. Хаятов Х.У., Тахиров Б.Н. Постановка обратной задачи для уравнений математической физики. // Academy. 2020. №10 (61). — С. 32-35.