

PEDAGOGIK MAHORAT

Ilmiy-nazariy va metodik jurnal

**MAXSUS SON
(2020-yil, iyun)**

Jurnal 2001-yildan chiqa boshlagan

Buxoro – 2020

PEDAGOGIK MAHORAT

Ilmiy-nazariy va metodik jurnal 2020, Maxsus son

Jurnal O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi OAK Rayosatining 2016-yil 29-dekabrda qarori bilan **pedagogika** va **psixologiya** fanlari bo'yicha dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo'lgan zaruriy nashrlar ro'yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2001-yilda tashkil etilgan.

Jurnal 1 yilda 6 marta chiqadi.

Jurnal O'zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2016-yil 22-fevral № 05-072-sonli guvohnoma bilan ro'yxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti

Tahririyat manzili: O'zbekiston Respublikasi, Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko'chasi, 11-uy
Elektron manzil: ped_mahorat@umail.uz

TAHRIR HAY'ATI:

Bosh muharrir: Adizov Baxtiyor Rahmonovich – pedagogika fanlari doktori, professor

Bosh muharrir o'rinbosari: Navro'z-zoda Baxtiyor Negmatovich – iqtisod fanlari doktori, professor

Mas'ul kotib: Hamroyev Alijon Ro'ziqulovich – pedagogika fanlari nomzodi, dotsent

Xamidov Obidjon Xafizovich, iqtisod fanlari doktori

Begimqulov Uzoqboy Shoyimqulovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Mahmudov Mels Hasanovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Ibragimov Xolboy Ibragimovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Choriyev Abdushukur Choriyevich, pedagogika fanlari doktori, professor

Yanakiyeva Yelka Kirilova, pedagogika fanlari doktori, professor (N. Rilski nomidagi Janubiy-G'arbiy Universitet, Bolgariya)

Qahhorov Siddiq Qahhorovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Mahmudova Muyassar, pedagogika fanlari doktori, professor

Barotov Sharif Ramazonovich, psixologiya fanlari doktori, professor

Jabborov Azim Meyliqulovich, psixologiya fanlari doktori, professor

Sunnatova Ra'no Izzatovna, psixologiya fanlari doktori, professor

Kozlov Vladimir Vasilyevich, psixologiya fanlari doktori, professor (Yaroslavl davlat universiteti, Rossiya)

Morogin Vladimir Grigoryevich, psixologiya fanlari doktori, professor (Xakassiya davlat universiteti, Rossiya)

Belobrikina Olga Alfonsasovna, psixologiya fanlari nomzodi, professor (Novosibirsk davlat pedagogika universiteti, Rossiya)

Chudakova Vera Petrovna, psixologiya fanlari nomzodi (Ukraina pedagogika fanlari milliy akademiyasi, Ukraina)

Tadjixodjayev Zokirxo'ja Abdusattorovich, texnika fanlari doktori, professor

Amonov Muxtor Raxmatovich, texnika fanlari doktori, professor

O'rayeva Darmonoy Saidjonovna, filologiya fanlari doktori, professor

Axmedova Shoiri Ne'matovna, filologiya fanlari doktori, professor

Durdiyev Durdimurod Qalandarovich, fizika-matematika fanlari doktori, professor

Hayitov Shodmon Axmadovich, tarix fanlari doktori, professor

To'rayev Halim Hojiyevich, tarix fanlari doktori, professor

Mirzayev Shavkat Mustaqimovich, texnika fanlari doktori, professor

Mahmudov Nosir Mahmudovich, iqtisod fanlari doktori, professor

Bo'taboyev Muhammadjon To'ychiyevich, iqtisod fanlari doktori, professor

Bo'riyev Sulaymon Bo'riyevich, biologiya fanlari doktori, professor

Olimov Shirinboy Sharopovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Qahhorov Otabek Siddiqovich, iqtisodiyot fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD), dotsent

Qosimov Fayzullo Muhammedovich, pedagogika fanlari nomzodi, dotsent

Jumayev Ulug'bek Sattorovich, psixologiya fanlari nomzodi, dotsent

ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ МАСТЕРСТВО

Научно-теоретический и методический журнал

2020, специальный выпуск

Журнал включен в список обязательных выпусков ВАК при Кабинете Министров Республики Узбекистан на основании Решении ВАК от 29 декабря 2016 года для получения учёной степени по педагогике и психологии.

Журнал основан в 2001г.

Журнал выходит 6 раз в год

Журнал зарегистрирован Бухарским управлением агентства по печати и массовой коммуникации Узбекистана.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации № 05-072 от 22 февраля 2016 г.

Учредитель: Бухарский государственный университет

Адрес редакции: Узбекистан, г. Бухара, ул. Мухаммад Икбол, 11.

e-mail: ped_mahorat@umail.uz

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Главный редактор: Адизов Бахтиёр Рахманович – доктор педагогических наук, профессор

Заместитель главного редактора: Навруз-заде Бахтиёр Нигматович – доктор экономических наук, профессор

Ответственный редактор: Хамраев Алижон Рузикулович – кандидат педагогических наук, доцент

Хамидов Обиджон Хафизович, доктор экономических наук

Бегимкулов Узакбай Шаимкулович, доктор педагогических наук, профессор

Махмудов Мэлс Хасанович, доктор педагогических наук, профессор

Ибрагимов Холбой Ибрагимович, доктор педагогических наук, профессор

Чориев Абдушуккур Чориевич, доктор педагогических наук, профессор

Янакиева Елка Кирилова, доктор педагогических наук, профессор (Болгария)

Каххаров Сиддик Каххарович, доктор педагогических наук, профессор

Махмудова Муяссар, доктор педагогических наук, профессор

Баратов Шариф Рамазанович, доктор психологических наук, профессор

Джаббаров Азим Мейликулович, доктор психологических наук, профессор

Суннатов Рано Иззатовна, доктор психологических наук, профессор

Козлов Владимир Васильевич, доктор психологических наук, профессор (Ярославль, Россия)

Морогин Владимир Григорьевич, доктор психологических наук, профессор (Абакан, Россия)

Белобрыкина Ольга Альфонсасовна, кандидат психологических наук, профессор (Новосибирск, Россия)

Чудакова Вера Петровна, PhD (Психология) (Киев, Украина)

Таджиходжаев Закирходжа Абдусаттарович, доктор технических наук, профессор

Аманов Мухтор Рахматович, доктор технических наук, профессор

Ураева Дармоний Саиджановна, доктор филологических наук, профессор

Ахмедова Шоира Негматовна, доктор филологических наук, профессор

Дурдыев Дурдымурад Каландарович, доктор физико-математических наук, профессор

Хаитов Шадман Ахмадович, доктор исторических наук, профессор

Тураев Халим Хаджиевич, доктор исторических наук, профессор

Мирзаев Шавкат Мустахимович, доктор физико-математических наук, профессор

Махмудов Насыр Махмудович, доктор экономических наук, профессор

Бутабоев Мухаммаджон Туйчиевич, доктор экономических наук, профессор

Буриев Сулаймон Буриевич, доктор биологических наук, профессор

Олимов Ширинбай Шарапович, доктор педагогических наук, профессор

Каххаров Отабек Сиддинович, доктор философии по экономическим наукам (PhD), доцент

Касимов Файзулло Мухаммедович, кандидат педагогических наук, доцент

Жумаев Улугбек Саттарович, кандидат психологических наук, доцент

**ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА НОРМА ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ
В ПРОСТРАНСТВЕ $\bar{L}_2^m(K_n)$.**

Озоджон ЖАЛОЛОВ
БухГУ, доцент кафедры
«Информационные технологии»

В настоящей работе получена верхняя оценка норма функционала погрешности кубатурных формул в пространстве $\bar{L}_2^m(K_n)$. Такая же оценка ранее была получена для нормы функционала погрешности кубатурной формулы (1) над фактор пространством С.Л.Соболева $L_2^{(m)}(K_n)$ и в результате мы получим одинаковый порядок сходимости к нулю при $N \rightarrow \infty$, но хотя норма функции определена разными.

Ключевые слова: кубатурная формула, весовая кубатурная формула, обобщённая функция, функционалом погрешности.

In this paper in the space $\bar{L}_2^m(K_n)$ received an upper estimate for the norm of the error functional of cubature formulas. The same estimate was previously obtained for the norm of the error functional of the cubature formula (1) over the factor space of S. L. Sobolev $L_2^{(m)}(K_n)$ and as a result we get the same order of convergence to zero for $N \rightarrow \infty$, but although the norm of the function is defined different.

Key words: cubature formula, weight cubature formula, generalized function, functional errors.

Современная постановка проблемы оптимизации формул приближённого интегрирования заключается в минимизации нормы функционала погрешности формулы на выбранных нормированных пространствах, например [1] – [4].

В этих работах исследуется проблема оптимальности относительно некоторого определённого пространства. Большинство из них рассмотрены в пространстве Соболева [1]. Многомерные кубатурные формулы отличаются от одномерных двумя особенностями:

- 1) бесконечно разнообразны формы многомерных областей интегрирования;
- 2) быстро растёт число узлов интегрирования с увеличением размерности пространства. Проблема 2) требует особого внимания к построению наиболее экономных формул.

В настоящей работе рассматриваются формулы именно с учётом этого требования. Как известно, что выражением Н.С. Бахвалова такие формулы называется “практичные формулы” [5]

Пусть $B(\Omega)$ - пространство Банаха, компактно вложенное в $C(\Omega)$, $B^*(\Omega)$ сопряжённое к $B(\Omega)$ пространство. Интеграл от функции по области Ω :

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int \varepsilon_{\Omega}(x) f(x) dx$$

является линейным функционалом над B . Его приближённое выражение

$$\sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda} f(x^{(\lambda)}) = \int \sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda} \delta(x - x^{(\lambda)}) f(x) dx$$

будет некоторым другим функционалом.

Линейным функционалом является и погрешность кубатурной формулы.

$$\int \varepsilon_{\Omega}(x) f(x) dx - \sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda} f(x^{(\lambda)}) = \int \left[\varepsilon_{\Omega}(x) - \sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda} \delta(x - x^{(\lambda)}) \right] f(x) dx = \langle \ell(x), f(x) \rangle$$

где $\ell(x) = \varepsilon_{\Omega}(x) - \sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda} \delta(x - x^{(\lambda)})$ - обобщённая функция которая называется функционалом погрешности кубатурной формулы

$$\int_{\Omega} f(x) dx \approx \sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda} f(x^{(\lambda)})$$

и $\delta(x)$ - функция Дирака, $\varepsilon_{\Omega}(x)$ - индикатор области Ω .

c_{λ} и $x^{(\lambda)}$ - коэффициенты и узлы кубатурной формулы.

В настоящей работе рассмотрим кубатурную формулу

$$\int_{K_n} f(x) dx \approx \sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda} f(x^{(\lambda)}) \quad (1)$$

над пространством $\bar{L}_2^{(m)}(K_n)$, где K_n - n - мерный единичный куб.

Кубатурной формулы (1) сопоставим обобщённую функцию

$$\ell_N(x) = \varepsilon_{K_n}(x) - \sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda} \delta(x - x^{(\lambda)}), \quad (2)$$

и назовём её функционалом погрешности.

Определение. Пространства $\bar{L}_2^{(m)}(K_n)$ - определяется как пространство функций заданных на n - мерном единичном кубе.

K_n и имеющих обобщённые производные порядка m , суммируемые с квадратом в норме

$$\|f(x)/\bar{L}_2^{(m)}(K_n)\| = \left\{ \int_{K_n} \left(\frac{\partial^m f(x)}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \dots \partial x_n^{m_n}} \right)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

со скалярным произведением

$$(f(x), \varphi(x))_{\bar{L}_2^{(m)}(K_n)} = \int_{K_n} \left(\frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m} \right) \left(\frac{\partial^m \varphi(x)}{\partial x^m} \right) dx,$$

где $\partial x^m = \partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \dots \partial x_n^{m_n}$, $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$, $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$.

Как известно [1], что норма функции в пространстве $L_2^{(m)}(K_n)$ - определяется формулой:

$$\|f(x)/L_2^{(m)}(K_n)\| = \left\{ \int_{K_n} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left(D^{|\alpha|} f(x) \right)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

где $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$ и $D^{|\alpha|} f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Пусть в (4) положим $n = 2$ и $m = 2$, тогда отсюда получим, что

$$\begin{aligned} \int_{K_2} \sum_{|\alpha|=2} \frac{2!}{\alpha!} \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx &= \int_{K_2} \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = 2} \frac{2!}{\alpha_1! \alpha_2!} \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \right)^2 dx = \\ &= \int_{K_2} \left[\left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} \right)^2 + \frac{2!}{1!1!} \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} \right)^2 \right] dx. \end{aligned} \quad (5)$$

При $n = 2$ и $m = 2$ равенство (3) принимает следующий вид

$$\|f(x)/\bar{L}_2^{(2)}(K_n)\|^2 = \int_{K_2} \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2}} \right)^2 dx. \quad (6)$$

Очевидно, что для правая часть (6) меньше вычислений чем (5) и отсюда следует, что для нормы функции в пространстве $\bar{L}_2^{(m)}(K_2)$ количество вычислительных операций будет гораздо меньше чем в пространстве $L_2^{(2)}(K_2)$, так как в норме (6) участвует только смешенные производные.

Теперь докажем следующую теорему который является основным результатом.

Теорема. Если для функционала погрешности (2) весовой кубатурной формулы (1) над пространством $\bar{L}_2^{(m)}(K_n)$ выполняется условие

$$\ell_N(x) = \ell_{N_1}(x_1) \cdot \ell_{N_2}(x_2) \cdot \dots \cdot \ell_{N_n}(x_n)$$

и

$$\left\| \ell_{N_i}(x_i) / \bar{L}_2^{(m_i)}(0,1) \right\| \leq c_i \frac{1}{N_i^{m_i}}, \quad c_i - \text{константы}, \quad (7)$$

т.е.

$$\left\| \ell_{N_i}(x_i) / \bar{L}_2^{(m_i)*}(0,1) \right\| \leq c_i O(h^{m_i}), \quad c_i - \text{константы}, (i = \overline{1, n}), \quad (8)$$

то

$$\left\| \ell_N(x) / \bar{L}_2^{(m)*}(K_n) \right\| \leq c \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^n N_i^{m_i}}, \quad c - \text{константа}, \quad (9)$$

или

$$\left\| \ell_N(x) / \bar{L}_2^{(m)*}(K_n) \right\| \leq c \cdot O(h^m) \quad (10)$$

где $\ell_{N_i}(x_i) = \varepsilon_{K_i}(x_i) - \sum_{\lambda_i=1}^{N_i} c_{\lambda_i} \delta(x_i - x_i^{(\lambda_i)})$

$c = \prod_{i=1}^n c_i$, $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ и m_i - произвольны ($i = \overline{1, n}$) т.е. $0 \leq m_i \leq m$

Доказательство ведём методом математической индукции.

Пусть $n = 2$, тогда

$$x = (x_1, x_2), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2, \quad m = m_1 + m_2, \quad dx = dx_1 dx_2, \quad f(x) = f(x_1, x_2),$$

$$\ell_N(x) = \ell_{N_1}(x_1) \cdot \ell_{N_2}(x_2).$$

Если полагать в (3) $n = 1$ то, получим

$$\left\| f(x_i) / \bar{L}_2^{(m_i)}(0,1) \right\| = \left\{ \int_0^1 \left(\frac{\partial^{m_i} f(x_i)}{\partial x_i^{m_i}} \right)^2 dx_i \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (i = \overline{1, n}).$$

Таким образом, имеем

$$\left| \langle \ell_N(x_1, x_2), f(x_1, x_2) \rangle \right| = \left| \langle \ell_{N_2}(x_2), f(x_1, x_2) \rangle \right| \leq$$

$$\left\| \ell_{N_2}(x_2) / \bar{L}_2^{(m_2)*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \langle \ell_{N_1}(x_1), f(x_1, x_2) \rangle / \bar{L}_2^{(m_2)*}(0,1) \right\| \quad (11)$$

Вычислим следующую норму:

$$\left\| \langle \ell_{N_1}(x_1), f(x_1, x_2) \rangle / \bar{L}_2^{(m_2)*}(0,1) \right\| = \left\{ \int_0^1 \left| \frac{\partial^{m_2}}{\partial x_2^{m_2}} \langle \ell_{N_1}(x_1), f(x_1, x_2) \rangle \right|^2 dx_2 \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \int_0^1 \left| \langle \ell_{N_1}(x_1), \frac{\partial^{m_2}}{\partial x_2^{m_2}} f(x_1, x_2) \rangle \right|^2 dx_2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \left\{ \int_0^1 \left[\left\| \ell_{N_1}(x_1) / \bar{L}_2^{(m_1)*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \frac{\partial^{m_2}}{\partial x_2^{m_2}} f(x_1, x_2) / \bar{L}_2^{(m_1)}(0,1) \right\| \right]^2 dx_2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \\
&= \left\| \ell_{N_1}(x_1) / \bar{L}_2^{(m)}(0,1) \right\| \cdot \left\{ \int_0^1 \left[\int_0^1 \left[\frac{\partial^{m_1+m_2}}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2}} f(x_1, x_2) \right]^2 dx_1 \right] dx_2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \\
&= \left\| \ell_{N_1}(x_1) / \bar{L}_2^{(m_1)*}(0,1) \right\| \cdot \left\| f(x) / \bar{L}_2^{(m)}(K_2) \right\|, \text{ где } x = (x_1, x_2) \text{ и } m = m_1 + m_2. \quad (12)
\end{aligned}$$

Таким образом, из (11) и (12) получим

$$\begin{aligned}
|\langle \ell_N(x_1, x_2), f(x_1, x_2) \rangle| &\leq \left\| \ell_{N_2}(x_2) / \bar{L}_2^{(m_2)*}(0,1) \right\| \cdot \\
&\cdot \left\| \ell_{N_1}(x_1) / \bar{L}_2^{(m)*}(0,1) \right\| \cdot \left\| f(x) / \bar{L}_2^{(m)}(K_2) \right\|, \quad (13)
\end{aligned}$$

Имея в виду (3) из (13) получим

$$\left\| \ell_N(x) / \bar{L}_2^{(m)}(K_2) \right\| \leq \left\| \ell_{N_1}(x_1) / \bar{L}_2^{(m_1)*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \ell_{N_2}(x_2) / \bar{L}_2^{(m_2)*}(0,1) \right\|, \quad (14)$$

Учитывая (7) из (14) имеем

$$\left\| \ell_N(x) / \bar{L}_2^{(m)}(K_2) \right\| \leq d_1 \cdot d_2 \cdot \frac{1}{N_1^{m_1} \cdot N_2^{m_2}}$$

т.е.

$$\left\| \ell_N(x) / \bar{L}_2^{(m)}(K_2) \right\| \leq d_3 O(h^{m_1}) \cdot O(h^{m_2}), \quad (15)$$

где $d_3 = d_1 \cdot d_2$

При $n = k$ имеем [6]

$$\begin{aligned}
|\langle \ell_N(x), f(x) \rangle| &= |\langle \ell_N(x_1, x_2, \dots, x_k), f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rangle| = \\
|\langle \ell_{N_k}(x_k), \langle \ell_{N_{k-1}}(x_{k-1}), \dots, \langle \ell_{N_2}(x_2), \langle \ell_{N_1}(x_1), f(x_1, x_2, \dots, x_k) \rangle, \dots, \rangle \rangle| &\leq \\
\leq \left\| \ell_{N_k}(x_k) / \bar{L}_2^{(m_k)*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \ell_{N_{k-1}}(x_{k-1}) / \bar{L}_2^{(m_{k-1})*}(0,1) \right\| \dots \\
\cdot \left\| \ell_{N_1}(x_1), f(x_1, x_2, \dots, x_k) / \bar{L}_2^{(m_1)*}(0,1) \right\| &\leq \\
\leq \left\| \ell_{N_k}(x_k) / \bar{L}_2^{(m_k)*}(0,1) \right\| \dots \left\| \ell_{N_1}(x_1) / \bar{L}_2^{(m_1)*}(x_1) \right\| \cdot \left\| f(x) / \bar{L}_2^{(m)}(K_k) \right\|. \quad (16)
\end{aligned}$$

Из (16) учитывая (3) имеем

$$\left\| \ell_N(x) / \bar{L}_2^{(m)}(K_k) \right\| \leq \left\| \ell_{N_1}(x_1) / \bar{L}_2^{(m_1)*}(0,1) \right\| \dots \left\| \ell_{N_k}(x_k) / \bar{L}_2^{(m_k)*}(0,1) \right\| \quad (17)$$

Тогда имея в виду (7) из (17) получим

$$\left\| \ell_N(x) / \bar{L}_2^{(m)}(K_k) \right\| \leq d \frac{1}{N_1^{m_1} \cdot N_2^{m_2} \dots N_k^{m_k}} \quad (18)$$

или учитывая (8) из (18) имеем

$$\left\| \ell_N(x) / \bar{L}_2^{(m)*}(K_k) \right\| \leq d \cdot O(h^{m_1}) \dots O(h^{m_k}), \quad \text{где } d = \prod_{i=1}^k d_i,$$

Используя из справедливость утверждения теорема при $n = k$ докажем, что утверждение выполняется при $n = k + 1$. Таким образом, пусть $n = k + 1$, тогда учитывая (3) из (17) имеем

$$\begin{aligned} & \left| \langle \ell_{N_{k+1}}(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}), f(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) \rangle \right| = \\ & = \left| \langle \ell_{N_1}(x_1), \langle \ell_{N_2}(x_2), \dots \langle \ell_{N_k}(x_k), \langle \ell_{N_{k+1}}(x_{k+1}), f(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) \rangle \dots \rangle \rangle \right| \leq \\ & \leq \left\| \ell_{N_1}(x_1) / \bar{L}_2^{(m_1)*}(0,1) \right\| \dots \left\| \ell_{N_k}(x_k) / \bar{L}_2^{(m_k)*}(0,1) \right\| \cdot \\ & \left\| \langle \ell_{N_{k+1}}(x_{k+1}), f(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) \rangle / \bar{L}_2^{(m_{k+1})}(0,1) \right\| \end{aligned} \quad (19)$$

Имея в виду (3) и (17) из (19) получим

$$\begin{aligned} & \left\| \ell_N(x) / \bar{L}_2^{(m)*}(K_{k+1}) \right\| \leq \left\| \ell_{N_1}(x_1) / \bar{L}_2^{(m_1)*}(0,1) \right\| \dots \\ & \cdot \left\| \ell_{N_k}(x_k) / \bar{L}_2^{(m_k)*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \ell_{N_{k+1}}(x_{k+1}) / \bar{L}_2^{(m_{k+1})}(0,1) \right\|, \end{aligned} \quad (20)$$

Используя (7) из (20) имеем

$$\left\| \ell_N(x) / \bar{L}_2^{(m)*}(K_{k+1}) \right\| \leq d \frac{1}{N_1^{m_1} \cdot N_2^{m_2} \dots N_{k+1}^{m_{k+1}}}, \quad (21)$$

или учитывая (15) и (21) получим

$$\left\| \ell_N(x) / \bar{L}_2^{(m)*}(K_{k+1}) \right\| \leq d \cdot O(h^{m_1}) \dots O(h^{m_{k+1}}), \quad \text{где } d = \prod_{i=1}^{k+1} d_i.$$

В заключение отметим, что таким образом получим неравенство (9) и (10), т.е.

$$\left\| \ell_N(x) / \bar{L}_2^{(m)*}(K_n) \right\| \leq d \frac{1}{N_1^{m_1} \cdot N_2^{m_2} \dots N_n^{m_n}}, \quad d - \text{константа.} \quad (22)$$

Или учитывая (8) из (22) имеем

$$\left\| \ell_N(x) / \bar{L}_2^{(m)*}(K_n) \right\| \leq d \cdot O(h^{m_1}) \dots O(h^{m_n}) \quad (23)$$

где $d = \prod_{i=1}^n d_i$. Так как $O(h^{m_1}) \dots O(h^{m_n}) = O(h^{m_1+m_2+\dots+m_n}) = O(h^m)$, то из (23) получим

$$\left\| \ell_N(x) / \bar{L}_2^{(m)*}(K_n) \right\| \leq d \cdot O(h^m), \quad d - \text{константа,} \quad (24)$$

что и требовалось доказать.

Таким образом мы получили оценку сверху для нормы функционала погрешности (2) кубатурной формулы (1) в пространстве $\bar{L}_2^{(m)*}(K_n)$.

Такая же оценка ранее была получена для нормы функционала погрешности кубатурной формулы (1) над фактор пространством С.Л.Соболева $L_2^{(m)}(K_n)$ и в результате мы получим одинаковый порядок сходимости к нулю при $N \rightarrow \infty$, но хотя норма функции определена разными, это подтверждается неравенством (24).

Список литературы

1. Жалолов О.И, С.И.Ибрагимов, Б.Р.Абдуллаев. Оценка погрешности кубатурных формул общего вида над фактор- пространством Соболева // WORLD Science "Topical researches of the World science" —June 20 – 21, 2015, —Dubai, UAE).
2. Жалолов О.И, Косимов А.А. Оптимальные по порядку сходимости весовые кубатурные формулы типа Эрмита в пространстве $\bar{L}_2^m(K_n)$ // Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2015. -№3. -С.24- 33.
3. Жалолов О.И. Вычисление нормы функционала погрешности оптимальных интерполяционных формул в пространстве периодических функций С.Л.Собовева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$. Проблемы вычислительной и прикладной математики. // Научный журнал. -№2.-2015 декабр.-Ташкент.-53-58ст.
4. Жалолов О.И., Г.А.Акмалова. Оптимальные по порядку сходимости весовые кубатурные формулы в пространстве Соболева // «ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ». Материалы IX Международной научно-практической конференции. -Том 1. 11 марта 2015 г., -Россия, г. -Санкт-Петербург. -182-191ст.
5. Шадиметов Х. М, Жалолов О.И, Шадманова К.У., Шамсиев Ж. Ш. Оптимальные по порядку сходимости весовые кубатурные формулы типа Эрмита в пространстве Соболева // East European Scientific Journal. Wydrukowano w «Aleje Jerozolimskie . 85/21, 02-001 Warszawa, Polska». -2016. -162ст.
6. Жалолов О.И, И.Ф. Жалолов. Об одной асимптотической оптимальной кубатурной формуле // «Молодой учёный» Международный научный журнал. г.Казань. -№ 10 (114) . Май, -2016 г.
7. Шадиметов ХМ., Жалолов О.И. Вычисление нормы функционала погрешности и построение оптимальных по порядку сходимости весовых кубатурных формул типа Эрмита в пространстве Соболева // Проблемы вычислительной и прикладной математики. Научный журнал. -№1.2016 март. -Ташкент. -100-106 ст.
8. Жалолов О.И. Об одной весовой оптимальной по порядку сходимости кубатурной формуле в пространстве $L_p^{(m)}(K_n)$ // «Молодой учёный» Международный научный журнал. г. Казань. -№ 13 (117) . -Июль, -2016 г.
9. Жалолов О.И., Абдуллаев Б.Р. Построение оптимальных квадратурных формул типа Эрмита в пространстве периодических функций С.Л.Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_n)$. // «Молодой учёный» Международный научный журнал. -г.Казань. -№ 11 (145) . февраль, -2017 г.
10. Жалолов О.И., Боборахимова М. И. Алгоритм построения дискретного аналога одного оператора $D_4[\beta]$ // «Молодой учёный» Международный научный журнал. -г.Казань. -№ 11 (145) . февраль, -2017 г.
11. Жалолов О.И. Верхняя оценка нормы функционала погрешности кубатурной формулы типа Эрмита в пространстве С.Л.Соболева // Проблемы вычислительной и прикладной математики. Научный журнал. -№3.2017. -Ташкент. -70-78 ст.
12. Жалолов О.И. О существовании наилучших кубатурных формул общего вида над пространством С.Л.Соболева // Universum:технические науки: электрон. научн. журн. 2020. № 11(80).
13. OI Jalolov, KU Khayatov. Top evaluation for the rate of functional of error weight cubature formula in space // Scientific reports of Bukhara State University. 2020. №3(4),.32-37р
14. Жалолов О.И. Наилучшая весовая кубатурная формула над пространством С.Л.Соболева // Сибирский федеральный университет. 2011г.
15. З.Ш. Жумаев, О.И. Жалолов. Анализ алгебраических моделей коэффициента турбулентной вязкости при исследовании круглых турбулентных струй реагирующих газов // Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании. Усть-Каменогорск, Казахстан.2003г. 11-14ст.

16. Хаятов Х. У., Жураева Л. И., Жураев З. Ш. Основные понятия теории нечетких множеств // Молодой ученый. — 2019. — № 25 (263). — С. 41-44.
17. Хаятов Х.У., Жалолова Н.Х. О нахождении нормы функционала погрешности интерполяционных формул типа эрмита в периодическом пространстве // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2017. — № 4 (10). — С. 98-103.
18. Хаятов, Х. У. Оценка погрешности кубатурных формул общего вида над фактор-пространством Соболева// Молодой ученый. — 2016. — № 13 (117). — С. 58-60.
19. Хаятов Х.У. Некоторые вопросы теоремы вложения в классах периодических обобщенных функций в пространствах // Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии — 2016. — № 4 (32). — С. 51-57.
20. Хаятов Х.У., Очилова Н.Т. Об одной погрешности весовых кубатурных формул в Пространстве $\tilde{C}^{(m)}T_n$ // Сибирский федеральный университет. — 2011.
21. Хаятов Х.У. Об одной погрешности весовых кубатурных формул в пространстве // Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии — 2016. — № 4 (32). — С. 58-62.
22. Хаятов Х.У., Тахиров Б.Н. Постановка обратной задачи для уравнений математической физики. // Academy. 2020. №10 (61). — С. 32-35.