Journal of New Century Innovations

VOLUME 7

ISSUE-5

Journal of new century innovations

Exact and natural sciences

Pedagogical sciences

AREAS

Social sciences and humanities

Engineering and Medical Sciences

JOURNAL OF NEW CENTURY INNOVATIONS

IN ALL AREAS

ПРИЛОЖЕНИЕ КВАДРАТИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ИХ КРАЙНИЕ ТОЧКИ НА СИМПЛЕКСЕ

Мухитдинов Рамазон Тухтаевич,
физико-математический факультет,
Бухарский государственный университет
Тулаева Мадина Нутфуллоевна,
магистр, физико-математический факультет,
Бухарский государственный университет

Аннотация. В данной статье приводится краткое сведение о приложения множества квадратичных операторов, а также найдены все крайние точки множества одного квадратичного оператора, определенного на двумерном симплексе. Кроме того, дано полное описание множества всех сюръективных квадратичных операторов, определенных на том же симплексе.

Ключевые слова: крайние точки, множества, квадратичные операторы, симплекс, сюръективные отображения, система уравнений, выпуклая, линейная комбинация, единичный куб.

APPLICATION OF QUADRATIC OPERATORS AND THEIR EXTREME POINTS ON THE SIMPLEX

Muxitdinov Ramazon Tuxtaevich,
Faculty of Physics and Mathematics,
Bukhara State University
Tulaeva Madina Nutfulloevna,
Master Student, Faculty of Physics and Mathematics,
Bukhara State University

Annotation. This article provides a brief summary of the applications of the set of quadratic operators, and also finds all extreme points of the set of one quadratic operator defined on a two-dimensional simplex. In addition, a complete description of the set of all surjective quadratic operators defined on the same simplex is given.

Keywords: extreme points, sets, quadratic operators, simplex, surjective mappings, system of equations, convex, linear combination and unit cube.

Известно что, квадратичные операторы являются математической моделью некоторых процессов, например физических, биологических или механических. В этой связи, для сведения приведем приложение некоторых квадратичных операторов.

Так, одной из основных задач при исследовании квадратичных операторов является изучение эволюционное состояния изучаемого процесса. Например, обычно «потомки» состояния системы определяются некоторым законом. Для описания этих законов, возникающих в математической генетике, используются квадратичные (стохастические) операторы.

К необходимости изучения эргодических и асимптотических свойств итераций нелинейных преобразований приводят ряд задач из различных областей. Например, физические задачи, имеющие дело с взаимодействием между размножающимися и диффундирующими частицами; биологические задачи о динамике популяции замкнутой генетической системы; экономические задачи об устойчивости в моделях коллективного поведения и т.п.

Например, эволюционный оператор популяции в биологии является квадратичным оператором. При такой интерпретации задача нахождения предельного распределения индивидуумов различных типов в процессе эволюции замкнутой биологической системы равносильна изучению асимптотических свойств итераций квадратичного оператора. Кроме того, теория квадратичных стохастических операторов представляет значительный интерес и в чисто математическом плане обилием нетривиальных и нестандартных задач, а также нерешенных проблем.

По-видимому, задача изучения поведения траекторий (т.е. последовательности итераций) квадратичных стохастических операторов впервые встречается в работах С. Улама и его сотрудников. В этих работах при помощи ЭВМ проведен численный анализ траекторий для различных типов квадратичных стохастических операторов, заданных на двумерном симплексе.

Позднее были даны доказательства части обнаруженных С. Уламом и его сотрудниками закономерностей. Невозможность создания достаточно развитых аналитических методов в силу сложных и громоздких рекуррентный при изучении траекторий и необходимость проведения очень большого числа вычислений при изучении конкретных квадратичных операторов не стимулировали интерес к этой задаче.

Создание ЭВМ в сороковых годах возродило интерес к проблеме изучения поведения траекторий квадратичных операторов. С. Улам и его сотрудники провели вычисления на ЭВМ для достаточно большего числа квадратичных операторов. Квадратичные стохастические операторы появляются в весьма различных областях математики и ее приложений: теории вероятностей, теории дифференциальных уравнений, теории динамических систем, математической биологии и других.

Рассмотрим более подробно приложение квадратичных операторов в биологии.

Так, динамическая система – это объект или процесс, который характеризуется своим состоянием как совокупностью характеристик в некоторые моменты времени, и определен закон эволюции состояния динамической системы во времени.

Математическое моделирование нелинейных динамических систем является междисциплинарным инструментом исследования разнообразных процессов в природе и обществе. Первые результаты исследований динамических систем были получены при анализе моделей естественно-научных дисциплин – механики, биологии, метеорологии, синергетики, популяционной генетики, биофизики и т.д. К примеру, можно указать задачи отбора в локусах в генетике, в биофизике – модели молекулярной эволюции, одна из которых называется гиперциклами П. Шустера (см. Файстель Р., Романовский Ю.М., Васильев В.А. Эволюция гиперциклов Эйгена, протекающих в коацерватах // Биофизика. 1980. Т. 25, № 5. с. 882–887.). Все эти модели в значительной мере основываются на качественно-топологических методах теории динамических систем в целом. В свою очередь, прикладные задачи, возникающие в различных отраслях естествознания, все чаще становятся источником развития математических теорий.

Особенности изменения генетической структуры в органических популяциях снабжают нас задачами, где также приходится изучать нелинейные (в основном квадратичные) преобразования и их траектории. Одной из основных задач теории квадратичных стохастических операторов считают проблему С. Улама (Flach S., Ivanchenko M.V., Kanakov O.I. q-Breathers and the Fermi–Pasta–Ulam problem // Phys. Rev. Lett. 2005 V. 95. Art. 064102.) о полной топологической классификации квадратичного оператора базисного симплекса.

Сравнительно хорошо изученными среди квадратичные стохастические операторы являются так называемые вольтерровы отображения, введенные и разработанные в работах Р.Н. Ганиходжаева на основе сформулированной задачи С. Улама (Ганиходжаев Н.Н., Мухитдинов Р.Т. Об одном классе мер. Соответствующем квадратичным операторам // ДАН РУз, 1995 г., №3, стр.3-6.).

Интерес к изучению предельного поведения траекторий квадратичных отображений двумерного симплекса и их обобщениям возрос с появлением сообщений о результатах численных экспериментов, начатых Э. Ферми, С. Уламом, Дж. Пастой. В этом направлении, в теоретическом плане, наиболее содержательные и полезные результаты получены в работах Г. Кестена, Ю.И. Любича, С.С. Валландера, М.И. Захаревича, Н.П. Зимакова, Н.Н. Ганиходжаева, Р.Н. Ганиходжаева, Ф.А. Шахиди и др.

Другой класс квадратичных стохастических операторов – совокупность всех бистохастических квадратичных операторов (БКО) – по аналогии с определением линейного двояко-стохастического оператора посредством мажоризации Харди–Литтльвуда–Пойа. Проникновение мажорирования во многие теории, в частности в теорию квадратичные стохастические операторы, придает особый акцент актуальности его применения. Следовательно, изучение класса БКО также становится актуальной задачей как в плане траекторной теории и теории многомерных матриц, так и с точки зрения теории мажоризации.

Теперь рассмотрим другое приложение квадратичных операторов. Многоагентная система — это система, составленная из многих взаимодействующих так называемых интеллектуальных агентов, которые могут иметь различную информацию и/или расходящиеся интересы.

Агенты могут быть роботами, людьми или командами людей. Люди — это сложные личности, чье поведение регулируется многими аспектами, относящимися к социальному контексту, культуре, закону и другим факторам. Несмотря на эти многочисленные факторы, человеческое общество характеризуется поразительной глобальной закономерностью, в которой мы можем видеть переходы от беспорядка к порядку. Эти макроскопические явления, естественно, требуют математической модели для понимания социального поведения, т. е. модели для понимания закономерностей в большом масштабе как коллективных эффектов взаимодействия между отдельными людьми.

В основе человеческого поведения лежат мнения, которые могут рассматриваться как внутреннее состояние личностей, побуждающее к определенным действиям. Динамика мнений — это процесс слияния индивидуальных мнений, в котором группа взаимодействующих агентов непрерывно объединяет свои мнения по одному и тому же вопросу на основе установленных правил слияния для достижения консенсуса, поляризации или фрагментации на конечной стадии (Сабуров М., Сабуров Х. Приложения квадратичных стохастических операторов к нелинейным проблемам консенсуса // Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 1 (2022). стр. 110–126).

Отметим, что исторически идея достижения консенсуса путем повторных усреднений была предложена Де Грутом для структурированной синхронной среды, инвариантной по времени. С того времени консенсус, будучи наиболее общим феноменом многоагентных систем, становится популярным в разнообразных научных областях, таких как биология, физика, инженерия управления и социальные науки.

Для изучения эволюции мнений группы взаимодействующих индивидуумов были построены различные математические модели. Большинство подобных моделей является линейными. Обычно исследователи сосредоточены на задаче консенсуса и ищут пути его достижения. Исторически идея достижения консенсуса для структурированной синхронной среды, инвариантной по времени, была предложена Де Грутом (De Groot M.H. Reaching a consensus // J. Am. Statist. Assoc. 1974 y., vol. №69. pp. 118–121).

Позднее в работе Чаттерджи и Сенеты (Chatterjee S., Seneta E. Towards consensus: some convergence theorems on repeated averaging // J. Appl. Probab. – 1977 y., vol. №14, pp. 89–97) было произведено обобщение модели Де Грута для структурированной синхронной среды с переменным временем. В этих моделях динамика обмена мнениями в структурированной синхронной много агентной системе с переменным временем представлена обратным произведением квадратных стохастических матриц.

В то же время, неоднородная цепь Маркова представляется в виде прямого произведения квадратных стохастических матриц. Следовательно, консенсус многоагентных систем и эргодичность цепи Маркова являются двойственными задачами друг к другу. С этого момента консенсус, будучи наиболее общим феноменом много агентных систем, становится популярным в различных научных сообществах, таких как биология, физика, инженерия управления и социальные науки.

В недавнее время были построены некоторые нелинейные модели для характеризации динамики мнений в обществе (De Groot M.H. Reaching a consensus // J. Am. Statist. Assoc. 1974 y., vol. № 69. pp. 118–121). Более общая модель динамики обмена мнениями описывается средним процессом Краузе, в котором мнения представлены в виде векторов. Читатель может обратиться к монографии (Krause U. Positive dynamical systems in discrete time: theory, models, and applications, De Gruyter, Berlin, 2015 y.) за подробным рассмотрением средних процессов Краузе.

В отдельных работах была установлена корреляция между средними процессами Краузе и квадратичными стохастическими процессами. Квадратичный стохастический процесс является простейшей нелинейной цепью Маркова. Аналитическая теория квадратичных стохастических процессов, порожденных кубическими стохастическими матрицами, была построена в работе (Ganihodzhaev N. «On stochastic processes generated by quadratic operators», J. Theoret. Probab., 1991 y., vol. №4, pp.639–653).

Исторически квадратичный стохастический оператор был впервые введен Бернштейном (Bernstein S. «Solution of a mathematical problem connected with the theory of heredity», Ann. Math. Stat., 1942 y., vol. №13, pp. 53-61.). Квадратичный стохастический оператор рассматривался как важный инструмент анализа для изучения динамических свойств и моделирования в различных областях, таких как биология, физика, системы управления. Множества фиксированных точек и омега предельные множества квадратичных стохастических операторов, определенных на конечномерном симплексе, были глубоко изучены. Эргодичность и хаотическая динамика квадратичных стохастических операторов на конечномерном симплексе была досконально изучена. Подробное самостоятельное изложение последних достижений и открытых проблем теории квадратичных стохастических операторов и процессов было представлено в (Ganikhodzhaev R., Mukhamedov F. and Rozikov U. «Quadratic stochastic operators and processes: results and open problems,» Inf. Dim. Anal. Quan. Prob. Rel. Top., 2011 y., vol. №14, №2, pp. 279–335.).

Кроме того, в работе (https://www.pvpm.uz/index.php/pvpm/article/download/73/55+&cd=2&hl=ru&ct=clnk&gl=uz) изучены динамические системы, задаваемые кубическим оператором. Для одного кубического невольтерровского оператора на двумерном симплексе рассмотрено и найдено все неподвижные точки, и полностью изучены поведение траектории этого оператора. Известно, что динамика дискретной динамической системы зависят от начальных точек. Если получить начальную точку из ребро, то из инвариантности ребро стремится к неподвижной точки. Одна из основных задач для данной системы состоит в изучении эволюции состояния системы. Обычно потомки состояния системы определяются некоторыми законами. Для решений задач, возникающих в математической генетике используется квадратичные операторы, теория которых в настоящей время хорошо развита. Дано описание множества предельных точек траектории для некоторых подклассов таких операторов.

Также изучены траектория одного кубического оператора на двумерной симплексе, который естественным образом возникает при изучении некоторых задач популяционной биологии. В простейшей задаче популяционной генетики рассмотрены биологическая система конечного множества, состоящая из n разновидностей $1,2,\dots,n$. Считается, что разновидности родителей i,j,k однозначно определяют вероятность каждой разновидности l для непосредственного потомка. Описаны полная динамика конкретного оператора дискретного типа. Доказано, что любая траектория такого оператора сходится к неподвижной. Инвариантность каждого ребра и медианы помогает изучению динамики оператора.

Ещё раз наметим, что квадратичные операторы как объект исследования появились на рубеже тридцатых годов в работах Улама (Саримсаков Т.А., Ганиходжаев Н.Н. Центральная предельная теорема для квадратичных цепей // Узбекский математический журнал, 1991 г., №1, стр.57-64), где была поставлена задача изучения поведения траекторий квадратичных операторов. Невозможность создания достаточно развитых аналитических методов в силу сложных и громоздких рекурренций при изучении траекторий и необходимость проведения очень большего число вычислений при изучении конкретных квадратичных операторов не стимулировали интерес к этой задаче. Создание ЭВМ в прошлом веке возродило интерес к проблеме изучения поведения траекторий квадратичных операторов. Отечественные и зарубежные ученые провели вычисления на ЭВМ для достаточно большего числа квадратичных операторов.

Основной побудительной причиной изучения квадратичных операторов является то, что они в последнее время привлекают внимание специалистов в различных областях математики и ее приложений: теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей, теории динамических систем, математической биологии и т.д.

Итерации квадратичных операторов в симплексе почти не изучены, хотя уже давно привлекают внимание (Улам С. Нерешенные математические задачи, Москва, «Наука», 1964 г., 444 с.). Здесь, по-видимому, остаются открытыми многие стандартные вопросы теории динамических систем, например:

1. При каких условиях все траектории сходятся!

2. Всегда ли они сходятся по Чезаро, т. е. сходятся ли при $N \to \infty$ средние арифметические

$$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} V^n x_0$$

при каждом начальном состоянии x_0?

Из «индивидуальной» эргодической теоремы следует сходимость по Чезаро почти всюду относительно меры, инвариантной для V. Однако, эта мера сосредоточена на центре C динамической системы, порождаемой оператором V. Поскольку, вообще говоря, компакт C является нетривиальной частью симплекса а, то эргодическая теорема ничего не говорит о сходимости по Чезаро на непустом открытом множестве σ/L.

Положительный ответ на вопрос 2 вытекает из положительного ответа на следующий вопрос:

3. Будет ли предельное множество каждой траектории конечным?

Если да, то оно само будет периодической траекторией (предельным циклом).

4. Ограничены ли в совокупности длины периодических траекторий?

Наконец, сформулируем еще проблему устойчивости предельного множества.

5. Верно ли, что предельное множество траектории непрерывно зависит от начального состояния?

Трудности (может быть, и в отсутствие хороших ответов) в поставленных вопросах обусловлены чрезмерной общностью определения популяции.

Это определение, очевидно, далеко выходит за рамки биологии, подобно тому как общее определение системы дифференциальных уравнений второго порядка выходит за рамки механики.

Теперь изложим основные результаты настоящего статья. Отметим, что настоящая статья является продолжением статьи [1], где здесь более подробно приведены применение квадратичных операторов, а также дано полное описание множества всех сюръективных квадратичных операторов, определенных на двумерном симплексе.

Вводим понятие $m-1-$ мерного симплекса.

Множество

$$S^{m-1}=\{x=(x_1,\dots,x_m)\in R^m|x_i\geq 0,\sum_{i=1}^m x_i=1\}$$

называется $(m-1)$ – мерным симплексом.

В настоящей статье рассмотрим квадратичных операторов на двумерном симплексе.

Пусть, множество состоит из двух классов V и $\bar{V}$:

$$V=\left\{V_b=\begin{cases}\mathrm{P}_{11,1}=1, & \mathrm{P}_{12,1}=\mathrm{b}, \quad \mathrm{P}_{22,1}=0,\\ \mathrm{P}_{11,2}=0, & \mathrm{P}_{12,2}=1-\mathrm{b}, \quad \mathrm{P}_{22,2}=1,\end{cases} 0\leq \mathrm{b}\leq 1, \right\},$$

$$\bar{V}=\left\{\overline{V_b}=\begin{cases}\mathrm{P}_{11,1}=0, & \mathrm{P}_{12,1}=\mathrm{b}, \quad \mathrm{P}_{22,1}=1,\\ \mathrm{P}_{11,2}=1, & \mathrm{P}_{12,2}=1-\mathrm{b}, \quad \mathrm{P}_{22,2}=0,\end{cases} 0\leq \mathrm{b}\leq 1 \right\},$$

каждое из которых, является выпуклым множеством.

Операторы

$$V_1=\begin{cases}\mathrm{P}_{11,1}=1, & \mathrm{P}_{12,1}=0, & \mathrm{P}_{22,1}=0,\\ \mathrm{P}_{11,2}=0, & \mathrm{P}_{12,2}=1, & \mathrm{P}_{22,2}=1,\end{cases}$$

$$V_2=\begin{cases}\mathrm{P}_{11,1}=1, & \mathrm{P}_{12,1}=1, & \mathrm{P}_{22,1}=0,\\ \mathrm{P}_{11,2}=0, & \mathrm{P}_{12,2}=0, & \mathrm{P}_{22,2}=1,\end{cases}$$

являются крайними точками множества V и соответственно операторы

$$V_3=\begin{cases}\mathrm{P}_{11,1}=0, & \mathrm{P}_{12,1}=0, & \mathrm{P}_{22,1}=1,\\ \mathrm{P}_{11,2}=1, & \mathrm{P}_{12,2}=1, & \mathrm{P}_{22,2}=0,\end{cases}$$

и

$$V_4=\begin{cases}\mathrm{P}_{11,1}=0, & \mathrm{P}_{12,1}=1, & \mathrm{P}_{22,1}=1,\\ \mathrm{P}_{11,2}=1, & \mathrm{P}_{12,2}=0, & \mathrm{P}_{22,2}=0,\end{cases}$$

являются крайними точками множества $\bar{V}$.

Рассмотрим следующие операторы:

$$V_5=\begin{cases}\mathrm{P}_{11,1}=0, & \mathrm{P}_{12,1}=1, & \mathrm{P}_{22,1}=0,\\ \mathrm{P}_{11,2}=1, & \mathrm{P}_{12,2}=0, & \mathrm{P}_{22,2}=1,\end{cases}$$

$$V_6=\begin{cases}\mathrm{P}_{11,1}=1, & \mathrm{P}_{12,1}=0, & \mathrm{P}_{22,1}=1,\\ \mathrm{P}_{11,2}=0, & \mathrm{P}_{12,2}=1, & \mathrm{P}_{22,2}=0,\end{cases}$$

$$V_7=\begin{cases}\mathrm{P}_{11,1}=1, & \mathrm{P}_{12,1}=1, & \mathrm{P}_{22,1}=1,\\ \mathrm{P}_{11,2}=0, & \mathrm{P}_{12,2}=0, & \mathrm{P}_{22,2}=0,\end{cases}$$

$$V_8=\begin{cases}\mathrm{P}_{11,1}=0, & \mathrm{P}_{12,1}=0, & \mathrm{P}_{22,1}=0,\\ \mathrm{P}_{11,2}=1, & \mathrm{P}_{12,2}=1, & \mathrm{P}_{22,2}=1.\end{cases}$$

Теорема 1. Квадратичные операторы $V_i,\ i=1,2,\dots\dots,8$ образуют совокупность всех крайних точек множества всех квадратичных операторов, определенных на S^1 .

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно доказать, что любой квадратичный оператор

$$V=\begin{cases}P_{11,1}=a, & P_{12,1}=b, & P_{22,1}=c,\\ P_{11,2}=1-a, & P_{12,2}=1-b, & P_{22,2}=1-c,\end{cases}$$

определенных на S^1, где $0\le a\le 1, 0\le b\le 1$ и $0\le \mathrm{c}\le 1$, является выпуклой линейной комбинацией квадратичных операторов V_i при $i=1,2,\dots\dots,8$ и при этом не является таковой для любого меньшего числа операторов.

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^{a}\lambda_i\cdot V_i=V,$$

где

$$\lambda_i \geq 0$$

и

$$\sum_{i=1}^{a} \lambda_i = 1.$$

Это уравнение эквивалентно системе уравнений и неравенств

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_8 = 1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_6 + \lambda_7 = a, \\ \lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_7 = b, \\ \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_6 + \lambda_7 = c, \\ \lambda_i \geq 0 \;\; i = 1, \dots \dots, 8. \end{cases} \qquad (1)$$

Прежде чем доказывать разрешимость (1), покажем, что одно V_i $i = 1,2,\dots\dots,8$ не является выпуклой линейной комбинацией остальных операторов. Например, покажем, что V_8 не является выпуклой линейной комбинацией V_i $i = 1,2,\dots\dots,7$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Пусть

$$V_8 = \sum_{i=1}^{7} \lambda_i \cdot V_i.$$

Тогда имеем следующую систему уравнений и неравенств

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 = 1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_6 + \lambda_7 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_7 = 0, \\ \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_6 + \lambda_7 = 0, \\ \lambda_i \geq 0 \;\; i = 1, \dots \dots, 7. \end{cases}$$

Очевидно, система не имеет решений, т. к. из неравенств и последних трех уравнений следует $\lambda_i = 0$ для всех $i = 1,2,\dots\dots,7$, что противоречит

$$\sum_{i=1}^{7} \lambda_i = 1.$$

То, что система (1) разрешима, легко следует из следующего замечания.

Рассмотрим единичный куб

$$K = \{(y_1, y_2, y_3): 0 \leq y_1 \leq 1; 0 \leq y_2 \leq 1;\; 0 \leq y_3 \leq 1\}.$$

Очевидно, точки $B_1(1,0,0)$; $B_2(1,1,0)$; $B_3(0,0,1)$; $B_4(0,0,1)$; $B_5(1,0,1)$; $B_6(1,1,1)$; $B_7(0,1,0)$; и $B_8(0,0,0)$ является крайними точками куба и любая точка $C(a,b,c)$ является выпуклой линейной комбинацией этих крайних точек, т.е. существуют неотрицательные λ_i, $i = 1, \dots \dots \dots ,8,$

$$C = \sum_{i=1}^{a} \lambda_i B_i .$$

Координатная запись этого соотношения не что иное, как система (1), откуда и следует утверждение теоремы 1.

Крайние точки V_1, V_2, V_3, V_4, определенные выше, являются сюръективными квадратичными операторами.

Рассмотрим подробнее остальные четыре крайние точки. Квадратичным операторам V_5 и V_7 соответствуют следующие преобразования симплекса S^1:

$$V_5 = \begin{cases} x_1' = x_1^2 + x_2^2, \\ x_2' = 2x_1x_2, \end{cases}$$

и

$$V_7 = \begin{cases} x_1' = 2x_1x_2, \\ x_2' = x_1^2 + x_2^2. \end{cases}$$

Из рассуждений, легко заметить, что

$$V_5(S^1) = \left\{(x_1, x_2) \in S^1 : \frac{1}{2} \le x_1 \le 1\right\}$$

и

$$V_7(S^1) = \{(x_1, x_2) \in S^1 : 0 \le x_1 \le 1/2\},$$

причем прообраз каждой точки, принадлежащей $V_5(S^1)$ и $V_7(S^1)$, состоит из двух точек симметричных относительно центра симплекса S^1.

Квадратичным операторам V_6 и V_8 соответствуют следующие преобразования симплекса S^1.

$$V_6 = \begin{cases} x_1' = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2, \\ x_2' = 0, \end{cases}$$

и

$$V_8 = \begin{cases} x_1' = 0, \\ x_2' = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2, \end{cases}$$

откуда $V_6(S^1) = \{(1{,}0)\}$ и $V_8(S^1) = \{(0{,}1)\}$.

Таким образом, из восьми крайних точек множества квадратичных операторов, определенных на S^1, четыре крайние точки являются сюръективными квадратичными операторами, две крайние точки являются преобразованиями, переводящими симплекс в одну из его половин, причем обратные к ним являются двузначными отображениями; и, наконец, последние две крайние точки являются квадратичными операторами, переводящими весь симплекс в одну из его вершин.

Отметим, что каждый оператор является интересным примером в теории многомерных нелинейных динамических систем, с разнообразным поведением траекторий. Важно отметить, что циклические и хаотические динамические режимы могут возникать только в тех случаях, когда различия в воздействии саморегуляторных механизмов на особей разных полов достигают определенного критического значения [2-9]. Если же подобных различий нет, то в системе наблюдается единственное глобально устойчивое равновесие.

Заметим, что если рассматривается аналог квадратичных операторов с непрерывным временем, то задача переходить к исследование разных краевых задач для нелинейных дифференциальных (систем обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений в частных производных) уравнений были исследованы в работах [10-43]. Изучение задач этих типов требуют от исследователей (студентов и магистрантов) наличия знаний, навыков и компетенций, позволяющих самостоятельно обсуждать математические задачи [44-45].

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА (REFERENCES)

1. Мухитдинов Р.Т., Абдуллаева М.А. Крайние точки множества квадратичных операторов, определенных на S^1 // Scientific progress, 1:2 (2021), p.470-477.
2. Расулов Т.Х., Мухитдинов Р.Т. Уравнение Вайнберга для собственных функций модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке // Молодой учёный, № 9, часть 1, 2015, с.23-25.
3. Мухитдинов Р.Т. Construction of periodic solutions of nonlinear differential equations of second order // Международная научно-практическая конференция

«Интеграция современных научных исследований в развитие общества», 28-29 декабря, Россия, 2016, с.127-129.
4. Мухитдинов Р.Т. Комплексный формы представления уравнения идеального твёрдого тела // Международная научно-практическая конференция «Интеграция современных научных исследований в развитие общества», 28-29 декабря, Россия, 2016, с.129-131.
5. Мухитдинов Р.Т., Абдуллаева М.А. Эргодические свойства мер, порожденных одним классом квадратичных операторов // Проблемы науки, 63:4 (2021), с.16-19.
6. Muhitdinov R.T., Do'stova S.B. Gipergeometrik qatorlar haqida ayrim mulohazalar// Science and Education,scientific journal,2:11 (2021), 114-127.
7. Муҳитдинов Р.Т., Абдуллаева М.А. (2021). Гипергеометрик тенглама, унинг ечимлари ва гипергеометрик функциялар ҳақида. Science and Education 2 (11), 128-140.
8. Muxitdinov, R. (2022). О дифференциации обучения в вузах // Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).
9. Ганиходжаев Н.Н, Жамилов У.У., Мухитдинов Р.Т. Не эргодические квадратичные операторы двуполой популяции // Украинский математический журнал, том № 65, 2013, с.1152-1160.
10. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.
11. Rasulov H. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10 (2019), p.35-38.
12. Rasulov, R. X. R. (2021). Гиперболик типдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7)
13. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Айрим иррационал тенгламаларни ечишда интерфаол усулларни қўлланилиши // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.596-607.
14. Rasulov, H. (2021). «Kompleks analiz» fanida mustaqil ta'limni tashkil qilish. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
15. Салохитдинов М.С., Расулов Х.Р. (1996). Задача Коши для одного квазилинейного вырождающегося уравнения гиперболического типа // ДАН Республики Узбекистан, №4, с.3-7.
16. Rasulov, X. (2022). Об одном краевом задаче для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).
17. Расулов Т.Ҳ., Расулов Х.Р. (2021). Ўзгариши чегараланган функциялар бўлимини ўқитишга доир методик тавсиялар. Scientific progress. 2:1, 559-567 бетлар.
18. Расулов Х.Р. (1996). Задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №12, с.12-16.

19. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяция ва унинг математик модели ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.81-96.
20. Rasulov, H. (2021). Funksional tenglamalarni yechish bo‘yicha ba’zi uslubiy ko‘rsatmalar. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
21. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяциянинг динамикаси ҳақида // Scientific progress, 2:1 (2021), p.665-672.
22. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об анализе некоторых невольтерровских динамических систем с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с.27-30.
23. Rasulov Kh.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.
24. Rasulov X.R., Qamariddinova Sh.R. Ayrim dinamik sistemalarning tahlili haqida // Scientific progress, 2:1 (2021), p.448-454.
25. Rasulov H. Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration // Центр научных публикаций (buxdu. uz) 5:5 (2021).
26. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. Организация практического занятия на основе инновационных технологий на уроках математики // Наука, техника и образование, 72:8 (2020) с.29-32.
27. Исломов Б., Расулов Х.Р. (1997). Существование обобщенных решений краевой задачи для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №7, с.5-9.
28. Расулов Х.Р. и др. О разрешимости задачи Коши для вырождающегося квазилинейного уравнения гиперболического типа // Ученый XXI века. 53:6-1, 2019. С.16-18.
29. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, с. 197-199.
30. Rasulov, R. X. R. (2021). Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation of a mixed type // Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
31. Расулов Х.Р., Джуракулова Ф.М. Об одной динамической системе с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с. 19-22.
32. Х.Р Расулов, Ф.М. Джуракулова (2021). Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида // Scientific progress. 2:1, 455-462 бетлар.
33. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. О существовании обобщенного решения краевой задачи для нелинейного уравнения смешанного типа // Вестник науки и образования, 97:19-1 (2020), С. 6-9.
34. Rasulov, X. (2022). Краевые задачи для квазилинейных уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).

35. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Задача типа задач Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Scientific progress, 2:1 (2021), p.42-48.
36. Rasulov X.R. Sayfullayeva Sh.Sh. Buzilish chizig'iga ega bo'lgan elliptik tipdagi tenglamalar uchun qo'yiladigan chegaraviy masalalar haqida // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), p.46-54.
37. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики, № 53:2 (2021), с. 7-10.
38. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // Scientific progress, 2:2 (2021), p.870-879.
39. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.
40. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.
41. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. О некоторых вольтерровских квадратичных стохастических операторах двуполой популяции с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с.23-26.
42. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Об одном квадратично стохастическом операторе с непрерывным временем // «The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference, Tashkent, mart 2021 y., p.145-146.
43. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об одной динамической системе с непрерывным временем // «The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference, Tashkent, mart 2021 y., p.115-116.
44. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Модуль қатнашган баъзи тенглама, тенгсизлик ва тенгламалар системаларини ечиш йўллари // Science and Education, scientific journal, 2:9 (2021), p.7-20.
45. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Айрим рационал тенгламаларни ечишда интерфаол усулларни қўлланилиши ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p. 586-595.

JOURNAL OF NEW CENTRY INNOVATIONS

IN ALL AREAS

iD doi Google Scholar ICI JOURNALS MASTER LIST