Journal of New Century Innovations

VOLUME 7
ISSUE-5

Journal of new century innovations

AREAS

Exact and natural sciences

Pedagogical sciences

Social sciences and humanities

Engineering and Medical Sciences

JOURNAL OF NEW CENTURY INNOVATIONS

IN ALL AREAS

СЮРЪЕКТИВНЫЕ КВАДРАТИЧНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, ОПРЕДЕЛЕННЫЕ НА ДВУМЕРНОМ СИМПЛЕКСЕ

***Мухитдинов Рамазон Тухтаевич*,**
Физико-математический факультет,
Бухарский государственный университет
***Маматов Баходир Бебит угли*,**
Магистр, физико-математический факультет,
Бухарский государственный университет

Аннотация. В данной статье исследуется задача описания квадратичных операторов, являющихся сюръективными отображениями. Также, установлены необходимые и достаточные условия, при которых имеет место V (S^{n-1}) =S^{n-1} , где S^{n-1} – симплекс и V – квадратичный оператор, определенный на данном симплексе.

Ключевые слова: квадратичные операторы, сюръективные отображения, необходимые и достаточные условия, симплекс, оператор, потомки, математический модель, функция, преобразования, дискриминант.

SURJECTIVE QUADRATIC OPERATORS, DEFINED ON THE TWO-DIMENSIONAL SIMPLEX

Muxitdinov Ramazon Tuxtaevich,
Faculty of Physics and Mathematics,
Bukhara State University
Mamatov Bakhodir Bebit ugli,
Master Student, Faculty of Physics and Mathematics,
Bukhara State University

Annotation. In this article, we study the problem of describing quadratic operators that are surjective mappings. Also, necessary and sufficient conditions are

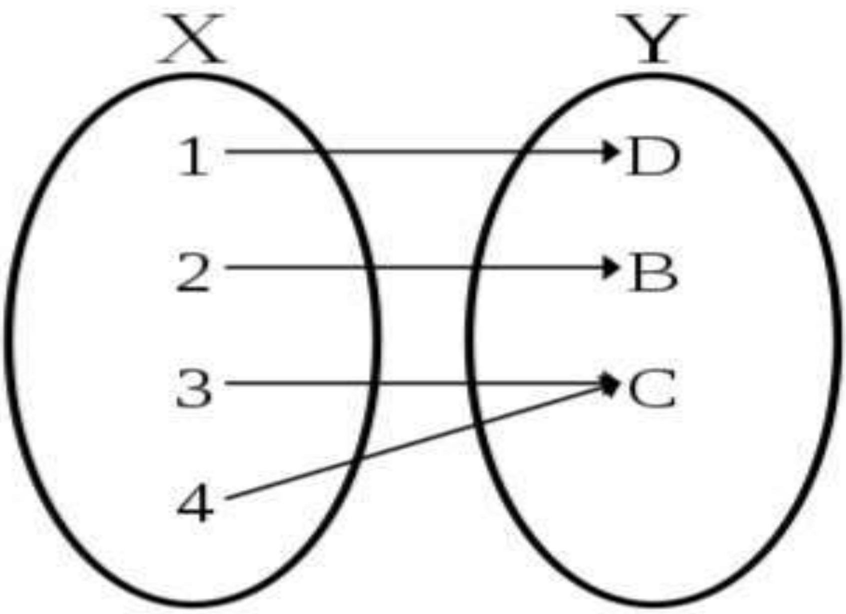
established under which V (S^{n-1}) =S^{n-1} , where S^{n-1} – is a simplex and V is a quadratic operator defined on a given simplex.

Keywords: quadratic operators, surjective mappings, necessary and sufficient conditions, simplex, operator, descendants, mathematical model, function, transformations, discriminant.

Сначала приводим определение сюръективное отображение. Далее дадим определение сюръективно квадратичных операторов, а также симплекса.

Сюръе́кция, или сюръекти́вное отображе́ние (от фр. sur «на, над», лат. jacio «бросаю») - отображение множества X на множество Y ($f: X \to Y$), при котором каждый элемент множества Y является образом хотя бы одного элемента множества X, то есть $\forall y \in Y\ \exists x \in X: y = f(x)$; иными словами — функция, принимающая все возможные значения. Иногда говорят, что сюръективное отображение $f: X \to Y$ отображает X на Y (инъективное отображение в общем случае отображает X в Y см. рис.).

Отображение $f: X \to Y$ сюръективно тогда и только тогда, когда образ множества X при отображении f совпадает с $Y: f(X) = Y$. Также сюръективность функции f эквивалентна существованию правого обратного отображения к f.



Строго говоря, понятие сюръекции $f: X \to Y$ привязано к множеству Y: корректно говорить вместо обычно допускаемой вольности речи «сюръекция» точное «сюръекция на Y». Фактически понятно, что каждое отображение является сюръекцией на свой образ: если $Z = \{y: f(x) = y,$ то $f: X \to Y$ — сюръекция на Z, поскольку формально также $f: X \to Z$ по определению отображения (https://ru.wikipedia.org/wiki/ Сюръекция).

Для наглядности приведем следующие примеры.

Пример.

$f: R \to [-1,1], f(x) = sinx -$ сюръективно;

$f: R \to [-1,1], f(x) = x^2 -$ сюръективно;

$f: R \to R, f(x) = x^2 -$ не является сюръективным (например, не существует такого $x \in R$, что $f(x) = -9$).

Кроме того, соответствие между множеством всех студентов и множеством всех групп – сюръективное отображение, так как каждой группе соответствует хотя бы один студент.

По другому сказать, что сюръекция - это такое отображение, что каждый элемент области значений имеет хотя бы один прообраз или функция называется сюръективной или отображением на, если каждый элемент из области значений является образом по крайней мере одного элемента из области определения.

Отображение $f(x) = sin(x) f(x) = sin(x)$, определенное на множестве R, с множеством $Y = [-2,2]$ не является сюръективным, т.к. для элемента $y = 2 \in Y$ нельзя найти прообраз $x \in X$.

Сюръекция имеет многочисленное применение. Например, - в топологии важное понятие расслоения определяется как произвольное непрерывное сюръективное отображение топологических пространств (расслоённого пространства в базу расслоения); - организация связи «многие к одному» между таблицами в сущностях реляционной модели данных может быть рассмотрена как сюръективная функция.

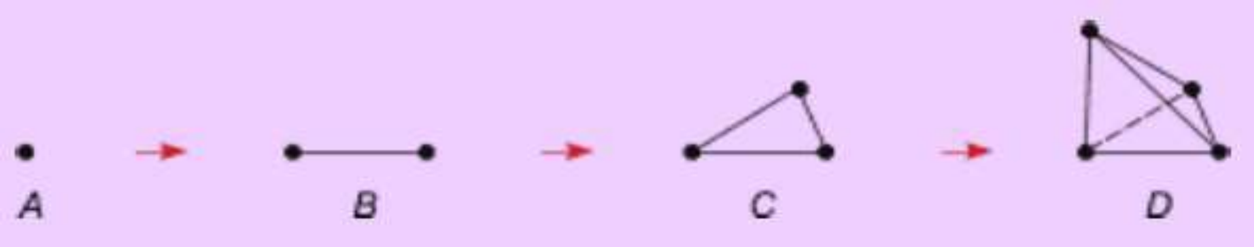
Сюръективные линейные стохастические операторы симплекса – это в точности операторы перестановки. Аналогичная задача для квадратичных стохастических операторов (нелинейных марковских операторов) на симплексе открыта в работе Ганиходжаева Н.Н. и его учеников (R. Ganikhodzhaev, F. Mukhamedov, U. Rozikov, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., 14:2 (2011), 279–335.).

В общем случае сюръективность квадратичных операторов тесно связана с нелинейными проблемами оптимизации, и описание таких операторов – трудная задача. В классе всех квадратичных операторов можно выделить класс операторов специального вида, а именно, так называемых квадратичных стохастических операторов, которым соответствуют кубические стохастические матрицы; такие операторы имеют удивительные приложения в генетике популяций (N. Ganikhodjaev, M. Saburov, U. Jamilov, Appl. Math. Inf. Sci., 7:5 (2013), 1721–1729.), а также в теории многоагентных систем. В приведенной статье получен критерий сюръективности квадратичных стохастических операторов с кубическими стохастическими матрицами и тем самым решена задача основная поставленная задача в (R. Ganikhodzhaev, F. Mukhamedov, U. Rozikov, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., 14:2 (2011), 279–335.).

Симплекс — это простейшая для $n-$ мерного пространства фигура. Для нульмерного пространства симплексом является точка. Для одномерного - отрезок. Для двумерного пространства симплекс — это треугольник, а для трехмерного — тетраэдр.

Дадим другое определение. Для нульмерного пространства симплексом является точка. Для одномерного — отрезок. Для двумерного пространства симплекс — это треугольник, а для трехмерного — тетраэдр.

С помощью карандаша поставим точку (рис. A). «Вытянем» из точки другую точку и соединим их — получим отрезок (рис. B). Возьмем на отрезке произвольную третью точку и «вытянем» ее вверх или вниз, соединим — получим треугольник (рис. C). Наконец, «вытянув» еще одну точку из треугольника и соединив все точки друг с другом, получим тетраэдр (рис. D). Таким примитивным способом нам удалось построить симплексы для пространств размерности от нуля до трех.



Дадим другое формальное определение понятию «симплекс». Симплекс — это выпуклый многогранник с числом вершин, на единицу большим, чем размерность пространства. Против любой вершины симплекса лежит грань, содержащая все остальные вершины.

Одной из основных задач изучения квадратичных операторов является исследование траекторий квадратичных операторов. Этой проблеме посвящены многочисленные работы (- Ганиходжаев Р.Н. О неподвижных точках квадратичных операторов // ДАН УзССР, 1977 г., №8, стр. 3-7; - Ганиходжаев Р.Н Квадратичные стохастические операторы. Функции Ляпунова и турниры // Математический сборник, 1992 г., том №183, №8, стр.119-140).

Изучению эргодических свойств квадратичных операторов посвящены работы (Валлендер С.С. Эргодические свойства одного семейства квадратичных стохастических операторов, в книге: Кольца и модули. Предельные теоремы теории вероятностей. Вып.№1, 1986 г., стр.153-157).

В работах (- Kesten H. Some nonlinear stochastic growth modeles // Bull.AMS. 1971 y., vol. №77, №4, pp.492-511; - Sarymsakov T.A., Ganikhodzhaev N.N. Analytic methods in the theory of quadrics stochastic operators // Journal of Theoretical Prob. 1990 y., vol. №3, pp.51-70) был определен класс квадратичных процессов, который соотносится к квадратичным оператором также, как марковский процесс к линейным операторам.

В работе (Хамраева А.Ю., Турсуновой А.Х., Полное описание поведения траекторий одного кубического оператора) изучены динамические системы, задаваемые кубическим оператором. Для одного кубического невольтерровского оператора на двумерном симплексе рассмотрено и найдено все неподвижные точки, и полностью изучены поведение траектории этого оператора.

Известно, что динамика дискретной динамической системы зависят от начальных точек. Если получим начальную точку из ребро, то из инвариантности ребро стремится к неподвижной точки. Одна из основных задач для данной системы состоит в изучении эволюции состояния системы.

Обычно потомки состояния системы определяются некоторыми законами. Для решений задач, возникающих в математической генетике используется квадратичные операторы, теория которых в настоящей время хорошо развита. Дано описание множества предельных точек траектории для некоторых подклассов таких операторов. Изучены траектория одного кубического оператора на двумерной симплексе, который естественным образом возникает при изучении некоторых задач популяционной биологии.

В простейшей задаче популяционной генетики рассматривался биологическая система конечного множества, состоящая из n разновидностей $1,2,\ldots,n$. Считаем, что разновидности родителей i,j,k однозначно определяют вероятность каждой разновидности l для непосредственного потомка.

Необходимость выделения такого класса операторов обусловлена тем, что при изучении математических моделей биологии для этого класса операторов любое состояние

$$(x_1', x_2', x_3', \ldots \ldots, x_n') \in S^{n-1}$$

является возможным для потомков первого поколения (0.1) и отсюда любое состояние $(x_1', x_2', x_3', \ldots \ldots, x_n') \in S^{n-1}$ будет являться возможным для потомков любого поколения. Так как эта задача не поддается глобальному решению при любых n, т.е. не существует единого метода для всех натуральных n. В данной статье рассмотрим случай $n = 2$.

На $S^1 = \{(x_1, x_2): \ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_1 + x_2 = 1\}$ произвольный квадратичный оператор V можно определить следующим образом:

$$V = \begin{cases} P_{11,1} = a, & P_{12,1} = b, & P_{22,1} = c, \\ P_{11,2} = 1 - a, & P_{12,2} = 1 - b, & P_{22,2} = 1 - c; \end{cases} \qquad (1)$$

где $0 \le a \le 1$ $0 \le b \le 1$ $0 \le c \le 1$ произвольные числа; и тогда преобразование, определяемое квадратичным оператором (1), принимает следующий вид:

$$\begin{cases} y_1 = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2, \\ y_2 = (1-a)x_1^2 + 2(1-b)x_1x_2 + (1-c)x_2^2. \end{cases} \quad (2)$$

Если определить симплекс как $S^1 = \{(x, 1-x)\ 0 \le x \le 1\}$, то (2) можно переписать следующим образом

$$\begin{cases} y = ax^2 + 2bx(1-x) + c(1-x)^2, \\ 1-y = (1-a)x^2 + 2(1-b)x(1-x) + (1-c)(1-x)^2. \end{cases}$$

Очевидно, что квадратичный оператор V сюръективен тогда и только тогда, когда область изменения функцию

$$y = ax^2 + 2bx(1-x) + c(1-x)^2$$

совпадает с отрезком [0,1] при $x \in [0,1]$.

После элементарных преобразований эту функцию можно привести к виду

$$y = (a - 2b + c)x^2 + 2(b - c)x + c. \quad (3)$$

Рассмотрим функцию (3), определенную на отрезке [0,1], и выясним, при условиях на коэффициенты a, b и c область изменения этой функции совпадает с отрезком [0,1].

Пусть $a - 2b + c > 0$. Только в следующих четырех случаях (см. рис. 2,3,4,5,) область изменения функции (3) совпадает с отрезком [0,1]. Рассмотрим в отдельности каждый из этих случаев. Так как $y(0) = c$ и $y(1) = a$, то в первом случае (см. рис. 2) $a = 1$ и дискриминант квадратного трехчлена (3) равен 0, т.е.

$$4(b-c)^2 - 4(a - 2b + c)c = 0,$$

или после упрощений

$$b^2 - ac = 0,$$

откуда, так как

$$a = 1, b^2 = c. \quad (4)$$

Так как кратный корень x^* уравнения $y = 0$ должен лежать в промежутке [0,1], то имеем

$$x^* = -\frac{b-c}{a-2b+c} \ge 0$$

В силу (4) это возможно лишь либо при $b = 0$, либо при $b = 1$, т.е. при этом $x^* = 0$. Но в силу предложения $a - 2b + c > 0$, т.е. случай $b = 1$ исключается. Таким образом, первый случай возможен, когда $a = 1,\ \ b = 0,\ \ c = 0$. Во втором случае (см. рис.3), $c = 1$, откуда

$$b^2 = a \tag{5}$$

С другой стороны, т.к.

$$x^* = \frac{c - b}{a - 2b + c} \leq 1 \tag{6}$$

то из (6) имеем

$$b \leq a \tag{7}$$

Из (5)-(7) следует, что либо $b = 0$, либо $b = 1$. Но в силу предложения $a - 2b + c > 0$, случай $b = 1$ исключается. Таким образом, второй случай возможен, когда $a = 0, b = 0, c = 1$.

Рассмотрим теперь третий случай (см.рис.4). Здесь $c = 0, a = 1$. Т.к. $x^* < 0$, что возможно при $0 < b < 1/2$, то третий случай реализуется при $a = 1, b \in (0; \frac{1}{2})$ и $c = 0$.

В четвертом случае (см. рис.5), $c = 1, a = 1$ и так как $x^* > 1$ и а-$2b + c > 0$, то окончательно имеем, что четверый случай возможен, когда $a = 0, 0 < b < 1/2$ и $c = 1$.

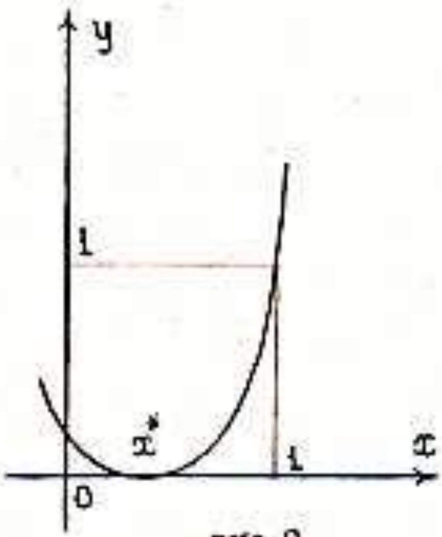


рис.2

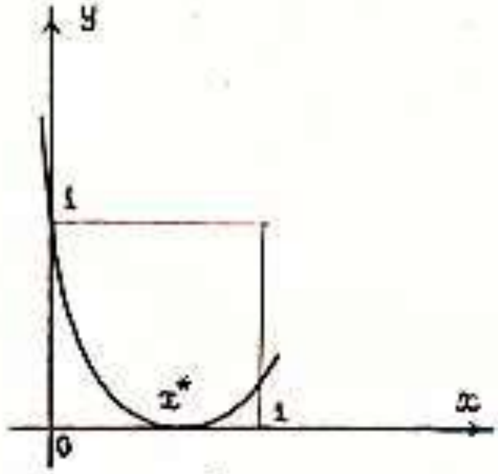


рис.3

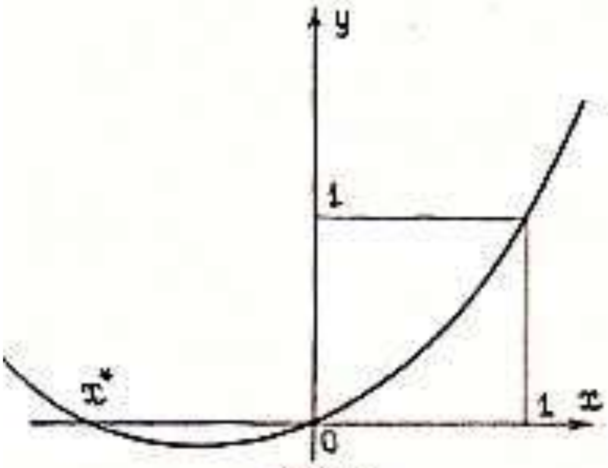


рис.4

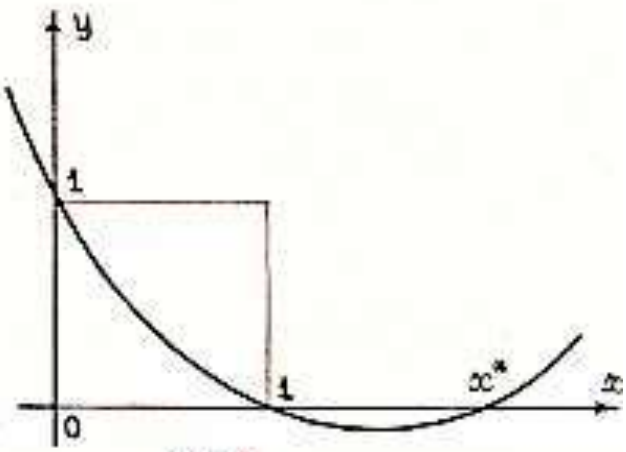


рис.5

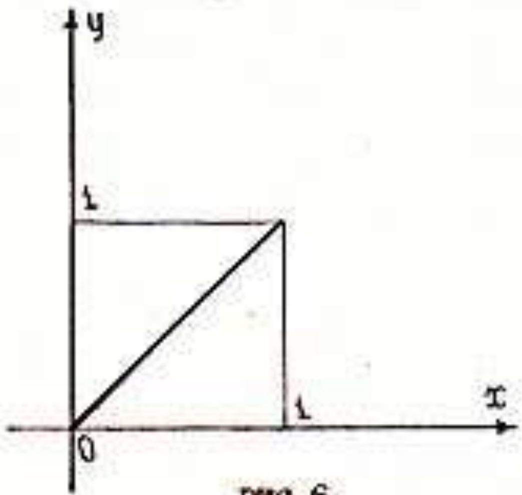


рис.6

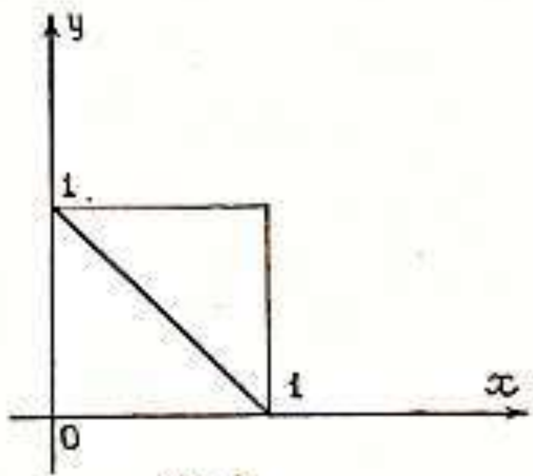


рис.7

При $a - 2b + c = 0$ возможны только два случая (см. рис.6) возможен, когда c $= 0, a = 1$, откуда $b = 1/2$, и второй случай (см. рис.7) возможен, когда $c = 1,\ a = 0$ откуда $b = 1/2$.

Пусть теперь $a - 2b + c\ <\ 0$. Здесь также возможны четыре случая (см. рис. 8, 9, 10, 11).

Рассмотрим первый случай (см. рис. 8) . Здесь с=0 и максимум функции, равный единице, достигается в точке $x \in [0,1]$.

Критической точкой функции (3) является точка

$$x^* = \frac{c-b}{a-2b+c}$$

или в этом случае $x^* = \frac{b}{2b-a}$ и $y(x^*)\ =\ 1/b$; и так как $y(x^*)\ =\ 1$, это возможно при b=1 и соответственно a=1. Таким образом первый случай имеет место при a=1, b=1 и c=0 и при этом x^* =1.

Во втором случае (см. рис. 9) a=0 и максимум функции, равный единице, достигается в точке $x^*\ \epsilon\ [0,1]$. Критическая точка x^* в этом случае вид

$$x^* = \frac{b-\mathrm{c}}{2b-\mathrm{c}}$$

и из условия $y(x^*)\ = 1$ следует, что $b = 2b - c$ или $b^2 - c = b - c$. Так как $2b - c > 0$, то из условия $x^* \geq 0$ следует, что $b - c \geq 0$; и так как $b^2 - b \leq 0$, то получим $b = 1$ и $c = 1$. Таким образом, этот случай имеет место при $a = 0, b = 1, c = 1$ и при этом $x^* = 0$.

В третьем случае (см. рис. 10) $c = 0, a = 1$; так как второй корень x^* уравнения $y = 0$ больше единице это имеет место при $b > 1/2$. Следовательно, этот случай имеет место при $a = 1, 1/2 < b < 1$ и $c = 1$.

Определим два класса операторов $\gamma = \{V_b{:}\, 0 \leq b \leq 1\}$ и

$$\bar{\gamma} = \{V_b{:}\, 0 \leq b \leq 1\},$$

где

$$V_b = \begin{cases} \mathrm{P}_{11,1} = 1,\ \ \mathrm{P}_{12,1} = \mathrm{b},\ \ \mathrm{P}_{22,1} = 0, \\ \mathrm{P}_{11,2} = 0,\ \ \mathrm{P}_{12,2} = 1-\mathrm{b},\ \ \mathrm{P}_{22,2} = 1, \end{cases}$$

и

$$\overline{V_b} = \begin{cases} P_{11,1} = 1, \quad P_{12,1} = b, \quad P_{22,1} = 0, \\ P_{11,2} = 0, \quad P_{12,2} = 1 - b, \quad P_{22,2} = 1. \end{cases}$$

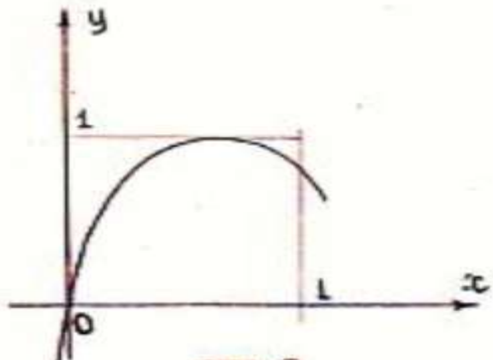


рис.8

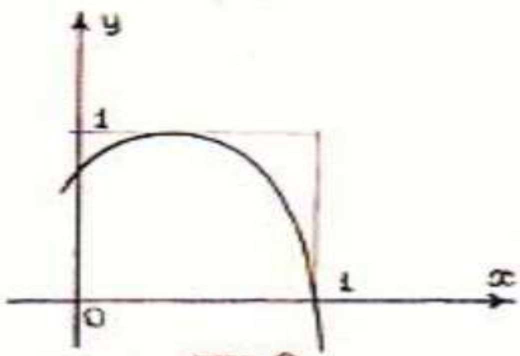


рис.9

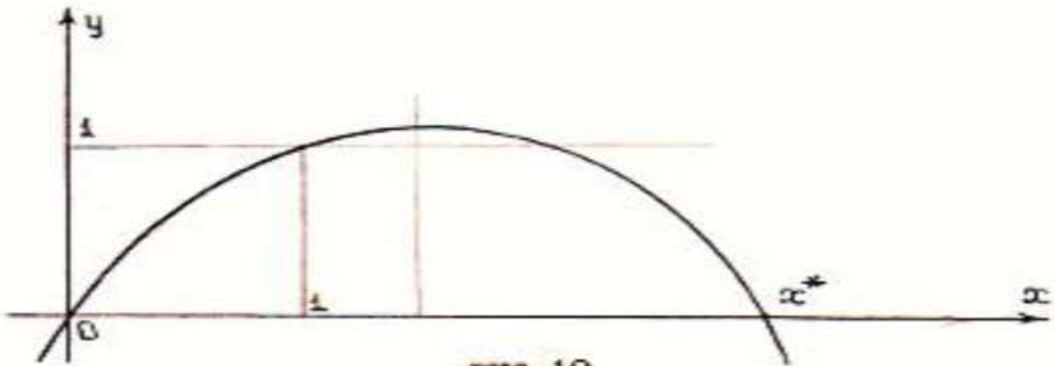


рис.10

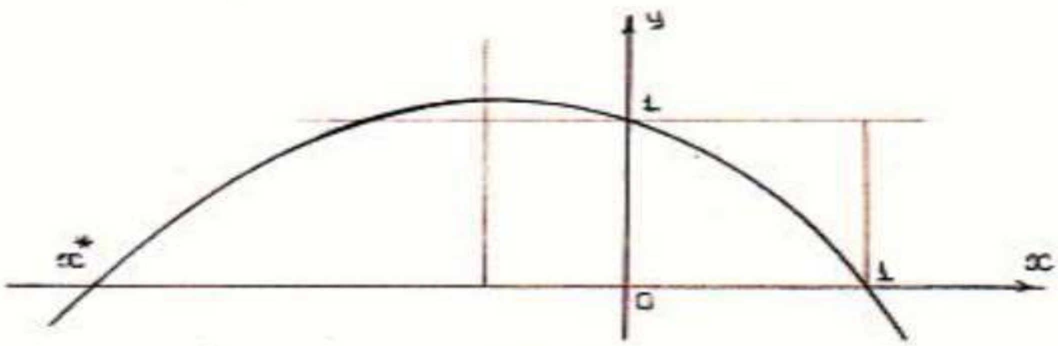


рис.11

Из рассмотренных выше частных случаев следует следующая теорема.

Теорема 1. Для того чтобы квадратичный оператор V, определенный на симплексе S^1, был сюръективным, необходимо и достаточно, чтобы он принадлежал либо классу V, либо $\bar{V}$.

Так как из рассмотренных выше случаев видно, что квадратичные операторы V_b или $\bar{V}$ при любых $b \in [0,1]$ являются взаимно однозначными отображениями симплекса S^1 на S^1, то в качестве следствия имеем следующую теорему.

Теорема 2. Для того чтобы квадратичный оператор $\bar{V}$, определенный на симплексе S^1, был биективным, необходимо и достаточно, чтобы он сюръективным отображением.

Отметим, что сюръективные квадратичные операторы используются при исследовании закономерностей, имеющие дело с взаимодействием между размножающимися и диффундирующими частицами; биологические задачи о динамике популяции замкнутой генетической системы [1-9]; экономические задачи об устойчивости в моделях коллективного поведения и т.п.

При изучение сюръективных квадратичных операторов время играет важную роль в изучении закономерности. В зависимости от задачи изучаются операторы с непрерывным временем или с дискретным временем. Обычно, квадратичные операторы с непрерывным временем приводятся к нелинейным дифференциальным уравнениям. Так, в работах [10-36] исследованы аналогичные сюръективные квадратичные и квадратично стохастические операторы с непрерывным временем и краевые задачи для нелинейных дифференциальных уравнений.

В целях качественному обучению студентов по предмету функциональный анализ, которой является основной фундаментальной наукой по различным операторам (в т.ч. сюръективные квадратичные операторы, определенные на двумерном симплексе и т.д.) проводится ряд научных исследований [37-44], в котором даны подробные информация о преимуществах и недостатках передовых педагогических технологий и описаны полученные положительные результаты.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА (REFERENCES)

1. Ганиходжаев Н.Н, Жамилов У.У., Мухитдинов Р.Т. Не эргодические квадратичные операторы двуполой популяции // Украинский математический журнал, том № 65, 2013, с.1152-1160.

2. Расулов Т.Х., Мухитдинов Р.Т. Уравнение Вайнберга для собственных функций модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке // Молодой учёный, № 9, часть 1, 2015, с.23-25.

3. Мухитдинов Р.Т. Construction of periodic solutions of nonlinear differential equations of second order // Международная научно-практическая конференция «Интеграция современных научных исследований в развитие общества», 28-29 декабря, Россия, 2016, с.127-129.

4. Мухитдинов Р.Т. Комплексный формы представления уравнения идеального твёрдого тела // Международная научно-практическая конференция «Интеграция современных научных исследований в развитие общества», 28-29 декабря, Россия, 2016, с.129-131.

5. Мухитдинов Р.Т., Абдуллаева М.А. Эргодические свойства мер, порожденных одним классом квадратичных операторов // Проблемы науки, 63:4 (2021), с.16-19.

6. Muhitdinov R.T., Do'stova S.B. Gipergeometrik qatorlar haqida ayrim mulohazalar// Science and Education,scientific journal,2:11 (2021), 114-127.

7. Муҳитдинов Р.Т., Абдуллаева М.А. (2021). Гипергеометрик тенглама, унинг ечимлари ва гипергеометрик функциялар ҳақида. Science and Education 2 (11), 128-140.

8. Muxitdinov, R. (2022). О дифференциации обучения в вузах // Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).

9. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // Scientific progress, 2:2 (2021), p.870-879.

10. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.

11. Rasulov H. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10 (2019), p.35-38.

12. Rasulov, X. (2021). Краевая задача для одного нелинейного уравнения смешанного типа. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

13. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. О некоторых вольтерровских квадратичных стохастических операторах двуполой популяции с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с.23-26.

14. Rasulov, X. (2022). О динамике одной квадратичной динамической системы с непреривным временем. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

15. Салохитдинов М.С., Расулов Х.Р. (1996). Задача Коши для одного квазилинейного вырождающегося уравнения гиперболического типа // ДАН Республики Узбекистан, №4, с.3-7.

16. Rasulov, R. X. R. (2021). Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation of a mixed type. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
17. Rasulov, R. X. R. (2022). О краевых задачах для уравнений эллиптического типа с линией искажения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).
18. Расулов Х.Р. (1996). Задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №12, с.12-16.
19. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяция ва унинг математик модели ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.81-96.
20. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.
21. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяциянинг динамикаси ҳақида // Scientific progress, 2:1 (2021), p.665-672.
22. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об анализе некоторых невольтерровских динамических систем с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с.27-30.
23. Rasulov Kh.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.
24. Rasulov X.R., Qamariddinova Sh.R. Ayrim dinamik sistemalarning tahlili haqida // Scientific progress, 2:1 (2021), p.448-454.
25. Rasulov H. Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration // Центр научных публикаций (buxdu. uz) 5:5 (2021).
26. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.
27. Исломов Б., Расулов Х.Р. (1997). Существование обобщенных решений краевой задачи для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №7, с.5-9.
28. Rasulov, R. X. R. (2021). Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation of a mixed type // Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
29. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, с. 197-199.
30. Rasulov, R. X. R. (2022). Бузилиш чизиғига эга бўлган квазичизиқли аралаш типдаги тенглама учун Трикоми масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
31. Расулов Х.Р., Джуракулова Ф.М. Об одной динамической системе с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с. 19-22.
32. Rasulov, R. X. R. (2022). Analysis of Some Boundary Value Problems for Mixed-Type Equations with Two Lines of Degeneracy. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

33. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. О существовании обобщенного решения краевой задачи для нелинейного уравнения смешанного типа // Вестник науки и образования, 97:19-1 (2020), С. 6-9.
34. Rasulov, X. (2022). Краевые задачи для квазилинейных уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).
35. Rasulov, R. X. R. (2021). Гиперболик типдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
36. Rasulov X.R. Sayfullayeva Sh.Sh. Buzilish chizig'iga ega bo'lgan elliptik tipdagi tenglamalar uchun qo'yiladigan chegaraviy masalalar haqida // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), p.46-54.
37. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики, № 53:2 (2021), с. 7-10.
38. Rasulov, H. (2021). One dynamic system with continuous time // Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
39. Rasulov, X. (2022). Об одном краевом задаче для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).
40. Rasulov, H. (2021). Funksional tenglamalarni yechish bo'yicha ba'zi uslubiy ko'rsatmalar. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
41. Rasulov, H. (2021). «Kompleks analiz» fanida mustaqil ta'limni tashkil qilish. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
42. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Об одном квадратично стохастическом операторе с непрерывным временем // «The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference, Tashkent, mart 2021 y., p.145-146.
43. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об одной динамической системе с непрерывным временем // «The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference, Tashkent, mart 2021 y., p.115-116.
44. Rasulov, R. X. R. (2022). Бузилиш чизиғига эга бўлган квазичизиқли аралаш типдаги тенглама учун Трикоми масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

JOURNAL OF NEW CENTRY INNOVATIONS

IN ALL AREAS