Buxoro davlat universiteti
BUXORO, 200117, M.IQBOL ko'chasi, 11-uy, 2021

@buxdu_uz @buxdu1 @buxdu1 www.buxdu.uz

«AMALIY MATEMATIKA VA AXBOROT TEXNOLOGIYALARINING ZAMONAVIY MUAMMOLARI» XALQARO ILMIY-AMALIY ANJUMAN

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI 1930

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
INNOVATSION
RIVOJLANISH VAZIRLIGI

«AMALIY MATEMATIKA VA AXBOROT TEXNOLOGIYALARINING ZAMONAVIY MUAMMOLARI» XALQARO ILMIY-AMALIY ANJUMAN TEZISLAR TO'PLAMI

ABSTRACTS INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND PRACTICAL CONFERENCE «MODERN PROBLEMS OF APPLIED MATHEMATICS AND INFORMATION TECHNOLOGIES»

ТЕЗИСЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ «СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

2021 YIL 15 APREL
BUXORO

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ
БУХОРО ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
АХБОРОТ ТЕХНОЛОГИЯЛАРИ ФАКУЛЬТЕТИ

АМАЛИЙ МАТЕМАТИКА ВА АХБОРОТ ТЕХНОЛОГИЯЛАРИНИНГ ЗАМОНАВИЙ МУАММОЛАРИ

ХАЛҚАРО МИҚЁСИДАГИ ИЛМИЙ-АМАЛИЙ АНЖУМАН

МАТЕРИАЛЛАРИ

2021 йил, 15-апрель

Бухоро – 2021

ТАШКИЛИЙ ҚЎМИТА

Раис: Хамидов О.Х., БухДУ ректори, профессор
Раис ўринбосари: Қаххоров О.С., БухДУ проректори, доцент
Ташкилий қўмита аъзолари:

Жўраев А.Т.	БухДУ, проректори, доцент
Рашидов Ў.У.	БухДУ, проректори
Зарипов Г.Т.	БухДУ, доцент
Эшанкулов Х.И.	БухДУ, декан, т.ф.ф.д., (PhD)
Жалолов О.И.	БухДУ, кафедра мудири, доцент
Сайидова Н.С.	БухДУ, кафедра мудири, доцент
Жумаев Ж.	БухДУ, доцент
Болтаев Т.Б.	БухДУ, доцент
Зарипова Г.К.	БухДУ, доцент
Рустамов Ҳ.Ш.	БухДУ, доцент
Хаятов Х.У.	БухДУ, катта ўқитувчи
Жўраев З.Ш.	БухДУ, катта ўқитувчи
Атаева Г.И.	БухДУ, катта ўқитувчи
Турдиева Г.С.	БухДУ, катта ўқитувчи

ДАСТУРИЙ ҚЎМИТА

Арипов М.М.	ЎзМУ, профессор
Алоев Р.Ж.	ЎзМУ, профессор
Шадиметов Х.М	Тошкент давлат транспорт университети, профессор
Расулов А.С.	Жаҳон иқтисодиёти ва дипломатия университети, профессор
Равшанов Н.	ТАТУ ҳузуридаги АКТ илмий-инновацион марказ, лаборатория мудири, профессор
Солеев А.С.	СамДУ, профессор
Дурдиев Д.Қ.	БухДУ, профессор
Ҳаётов А.Р.	В.И.Романовский номидаги Математика институти, профессор
Мўминов Б.Б.	ТАТУ, профессор
Худойберганов М.У.	ЎзМУ, доцент
Жумаев Ж.	БухДУ, доцент
Болтаев Т.Б.	БухДУ, доцент
Эшанкулов Х.И.	БухДУ, т.ф.ф.д., (PhD)
Жалолов О.И.	БухДУ, доцент
Сайидова Н.С.	БухДУ, доцент
Расулов Т.Ҳ	БухДУ, доцент

КОНФЕРЕНЦИЯ КОТИБЛАРИ

Атамурадов Ж.Ж., Эргашев А.А. Қосимов Ф.Ф., Ҳазратов Ф.Ҳ., Зарипов Н.Н., Ибрагимов С.И., Назаров Ш.Э.

Тўплам Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2021 йил 2 мартдаги 78-ф-сонли фармоиши билан тасдиқланган Ўзбекистон Республикасида 2021 йилда халқаро ва республика миқёсидаги ўтказиладиган илмий ва илмий-техник тадбирлар режасида белгиланган тадбирларнинг бажарилиши мақсадида 2021 йил 15 апрель куни Бухоро давлат университети Ахборот технологиялари факультетида “Амалий математика ва ахборот технологияларининг замонавий муаммолари” мавзусидаги халқаро илмий-амали анжуман материаллари асосида тузилди.

Масъул муҳаррир:
О.И.Жалолов, доцент
Тақризчилар:
Ж.Жумаев, доцент

9. Шадиметов ХМ., Жалолов О.И. Вычисление нормы функционала погрешности и построение оптимальных по порядку сходимости весовых кубатурных формул типа Эрмита в пространстве Соболева // Проблемы вычислительной и прикладной математики. Научный журнал. -№1.2016 март. -Ташкент. -100-106 ст.

10. Жалолов О.И. Верхная оценка нормы функционала погрешности кубатурной формуы типа Эрмита в пространстве С.Л.Соболева // Проблемы вычислительной и прикладной математики. Научный журнал. -№3.2017. -Ташкент. -70-78 ст.

11. Хаятов Х. У., Жураева Л. И., Жураев З. Ш. Основные понятия теории нечетких множеств // Молодой ученый. — 2019. — № 25 (263). — С. 41-44.

12. Хаятов Х.У, Жалолова Н.Х. О нахождении нормы функционала погрешности интерполяционных формул типа эрмита в периодическом пространстве // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2017. — № 4 (10). — С. 98-103.

13. Хаятов, Х. У. Оценка погрешности кубатурных формул общего вида над фактор-пространством Соболева// Молодой ученый. — 2016. — № 13 (117). — С. 58-60.

14. Хаятов Х.У. Некоторые вопросы теоремы вложения в классах периодических обобщенных функций в пространств // Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии — 2016. — № 4 (32). — С. 51-57.

15. Хаятов Х.У., Очилова Н.Т. Об одном погрешности весовых кубатурных формул в

16. Пространстве $\tilde{C}^{(m)}T_n$ // Сибирский федеральный университет. — 2011.

17. Хаятов Х.У. Об одной погрешности весовых кубатурных формул в пространстве // Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии — 2016. — № 4 (32). — С. 58-62.

18. Хаятов Х.У., Тахиров Б.Н. Постановка обратной задачи для уравнений математической физики. // Academy. 2020. №10 (61). — С. 32-35.

УДК 517.87

ОПТИМАЛЬНАЯ КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ТИПА ЭРМИТА В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА $\tilde{W}_2^{(m)}\left(T_1\right)$

[1]Жалолов И.И., [1]Жалолов И .Ф., [2]Нематова Ҳ.Э.

Национальный университет Узбекистана

Учительница №19 школы Бухарского района

Построение квадратурных формул, начата в работах А.Сарда [1] и .М.Никольского [2], для кубатурных формул С.Л.Соболева [3].

Рассмотрим квадратурную формулу типа Эрмита

$$\int_{T_1} f\left(x\right)dx \approx \sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N}\left(-1\right)^{\alpha} c_{\lambda}^{(\alpha)} f^{(\alpha)}\left(x^{(\lambda)}\right), \tag{1}$$

с функционалом погрешности

$$\ell_N^{(\alpha)}\left(x\right) = \varepsilon_{T_1}\left(x\right) - \sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_{\lambda}^{(\alpha)}\delta^{(\alpha)}\left(x - x^{(\lambda)}\right) \tag{2}$$

в пространстве С.Л.Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$, где соответственно $c_{\lambda}^{(\alpha)}$ и $x^{(\lambda)}$ являются произвольными коэффициентами и узлами квадратурной формулы (1), $f(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$, T_1 - одномерный тор, т.е. окружность длины равной единицы , $\varepsilon_{T_1}\left(x\right) -$ характеристическая функция T_1, а $\delta(x)$ - дельта функция Дирака и α - порядок производных.

Определение . Пространство $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ - определяется как пространство функций заданных на одномерном торе T_1 и имеющих все обобщенные производные порядка m суммируемые с квадратом в норме [1]

$$\left\| f / \tilde{W}_2^{(m)}(T_1) \right\|^2 = \left(\int_{T_1} f(x)dx \right)^2 + \sum_{k \neq 0} |2\pi k|^{2m} \left| \hat{f}_k \right|^2 . \tag{3}$$

Задача построения оптимальных квадратурных формул над пространством Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ - это вычисление следующей величины:

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} / \tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1) \right\| = \inf_{c_\lambda^{(\alpha)}, x^{(\lambda)}} \sup_{\|f(x)\| \neq 0} \frac{\left| < \ell_N^{(\alpha)}, f > \right|}{\left\| f / \tilde{W}_2^{(m)}(T_1) \right\|}, \tag{4}$$

где $\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)$ - сопряжённое пространство к пространству $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Для оценки погрешности квадратурной формулы необходимо решить следующую задачу.

Задача 1. Найти норму функционала погрешности (2) данной квадратурной формулы. Далее, чтобы построить оптимальную квадратурную формулу, необходимо решить следующую

Задача 2. Найти такие значения $c_\lambda^{(\alpha)}$ и $x^{(\lambda)}$, чтобы выполнялось равенство (4).

В настоящей работе имеется решением первой и второй задач для квадратурной формулы типа Эрмита вида (1). Справедлива следующая

Теорема 1. Квадрат нормы функционала погрешности (2) квадратурной формулы типа Эрмита вида (1) над пространством $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ равен

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} / \tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1) \right\|^2 = \left| 1 - \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)} \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)} (2\pi i)^\alpha k^\alpha e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{K^{2m}}, \tag{5}$$

где $c_\lambda^{(\alpha)}$ - коэффициенты, $x^{(\lambda)}$ - узлы квадратурной формулы (1) .

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 2. Оптимальная квадратурная формула типа Эрмита вида (1) в периодическом пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$, при $m = 4$ $(\alpha = 0,1,2,3)$ имеет равноотстоящие узлы $x^{(\lambda)} = \frac{\lambda}{N}$, $\lambda = 1,2,\ldots,N$ и равные коэффициенты $c_1 = c_2 = \ldots = c_N = c^0$, $c_1^{(1)} = c_2^{(1)} = \ldots = c_N^{(1)} = c^{0(1)}$ и $c_1^{(2)} = c_2^{(2)} = \ldots = c_N^{(2)} = c^{0(2)}$, $c_1^{(3)} = c_2^{(3)} = \ldots = c_N^{(3)} = c^{0(3)}$ который выражаются формулой

$$c^0 = \frac{\sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^4}}{N \left[\sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^4} + \frac{1}{(2\pi)^8 N^8} \left(\sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^4} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^8} - \left(\sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^6} \right)^2 \right) \right]}, \quad c^{0(1)} = 0 \quad \text{и}$$

$$c^{0(2)} = \frac{\sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^6}}{(2\pi)^2 N^3 \left[\sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^4} + \frac{1}{(2\pi)^8 N^8} \left(\sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^4} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^8} - \left(\sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^6} \right)^2 \right) \right]}, \quad c^{0(3)} = 0 \tag{6}$$

Доказательство. При $m = 4$, т.е $\alpha = 0,1,2,3$ (5) принимает следующий вид

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} / \tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1) \right\|^2 = \left(1 - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda \right)^2 +$$
$$+ \frac{1}{(2\pi)^8} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda e^{2\pi i x^{(\lambda)}} - (2\pi)^2 k^2 \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(2)} e^{2\pi i x^{(\lambda)}} + (2\pi i)\ k \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(1)} e^{2\pi i x^{(\lambda)}} + (2\pi i)^3\ k^3 \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(3)} e^{2\pi i x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^8} \tag{7}$$

После некоторых преобразований в равенстве (7) получим $\left\| \ell_N^{(\alpha)} / \tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1) \right\|^2 = \left(1 - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda\right)^2 +$

$$+\frac{1}{(2\pi)^8}\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\left(\sum_{\beta=1}^{N} c_\beta\right)\sum_{\lambda=1}^{N} c'_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} - (2\pi)^2 k^2\left(\sum_{\beta=1}^{N} c_\beta^{(2)}\right)\sum_{\lambda=1}^{N} c'^{(2)}_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} + (2\pi i)\ k\ \left(\sum_{\beta=1}^{N} c_\beta^{(1)}\right)\sum_{\lambda=1}^{N} c'^{(1)}_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} + (2\pi i)^3 k^3\left(\sum_{\beta=1}^{N} c_\beta^{(3)}\right)\sum_{\lambda=1}^{N} c'^{(3)}_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}\right|^2}{k^8} \tag{8}$$

где

$$c'_\lambda = \frac{c_\lambda}{\sum_{\beta=1}^{N} c_\beta}\ ,\quad c'^{(1)}_\lambda = \frac{c_\lambda^{(1)}}{\sum_{\beta=1}^{N} c_\beta^{(1)}}\ \text{ и }\ c'^{(2)}_\lambda = \frac{c_\lambda^{(2)}}{\sum_{\beta=1}^{N} c_\beta^{(2)}}\ ,\quad c'^{(3)}_\lambda = \frac{c_\lambda^{(3)}}{\sum_{\beta=1}^{N} c_\beta^{(3)}} \tag{9}$$

Очевидно что $\sum_{\lambda=1}^{N} c'_\lambda = 1$, $\sum_{\lambda=1}^{N} c'^{(1)}_\lambda = 1$ и $\sum_{\lambda=1}^{N} c'^{(2)}_\lambda = 1$, $\sum_{\lambda=1}^{N} c'^{(3)}_\lambda = 1$ (10)

Учитывая (9) и (10) равенство (8) перепишем в виде

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} / \tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1) \right\|^2 = \left(1 - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^8}\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\left(\left(\sum_{\beta=1}^{N} c_\beta\right)\sum_{\lambda=1}^{N} c'_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} - (2\pi)^2 k^2\left(\sum_{\beta=1}^{N} c_\beta^{(2)}\right)\sum_{\lambda=1}^{N} c'^{(2)}_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}\right)^2 + \left((2\pi)\ k\ \left(\sum_{\beta=1}^{N} c_\beta^{(1)}\right)^2\left(\sum_{\lambda=1}^{N} c'^{(1)}_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}\right) - (2\pi)^3 k^3\left(\sum_{\beta=1}^{N} c_\beta^{(3)}\right)^2\left(\sum_{\lambda=1}^{N} c'^{(3)}_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}\right)\right)^2\right|}{k^8} \tag{11}$$

Обозначая левую часть (11) через $\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda = x_1$, $\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(1)} = x_2$, $\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(2)} = x_3$ и $\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(3)} = x_4$, после некоторых преобразований равенство (11) перепишем полинома второй степени по x_1, x_2 , x_3 и x_4

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} / \tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1) \right\|^2 = \left(1 - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda\right)^2 +$$

$$\frac{1}{(2\pi)^8}\sum_{k\neq 0}\frac{\left(x_1\sum_{\lambda=1}^{N} c'_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} - (2\pi)^2 k^2 x_3\sum_{\lambda=1}^{N} c'^{(2)}_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}\right)^2 + \left((2\pi)\ k\ x_2\ \left(\sum_{\lambda=1}^{N} c'^{(1)}_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}\right) - (2\pi)^3 k^3 x_4\ \left(\sum_{\lambda=1}^{N} c'^{(3)}_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}\right)\right)^2}{k^8}\ . \tag{12}$$

или

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} / \tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1) \right\|^2 = \left(1 - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda\right)^2 + \frac{1}{(2\pi)^8} x_1^2 \sum_{k\neq 0}\frac{\left(\sum_{\lambda=1}^{N} c'_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}\right)^2}{k^8} - \frac{1}{(2\pi)^6} 2x_1x_3\sum_{k\neq 0}\frac{\sum_{\lambda=1}^{N} c'^{(2)}_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}\sum_{\lambda=1}^{N} c'_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}}{k^6} +$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^4} x_3^2 \sum_{k\neq 0}\frac{\left(\sum_{\lambda=1}^{N} c'^{(2)}_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}\right)^2}{k^4} + \frac{1}{(2\pi)^6} x_2^2 \sum_{k\neq 0}\frac{\left(\sum_{\lambda=1}^{N} c'^{(1)}_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}\right)^2}{k^6} - \frac{1}{(2\pi)^4} 2x_2x_4\sum_{k\neq 0}\frac{\sum_{\lambda=1}^{N} c'^{(1)}_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}\sum_{\lambda=1}^{N} c'^{(3)}_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}}{k^4} + \frac{1}{(2\pi)^2} x_4^2 \sum_{k\neq 0}\frac{\left(\sum_{\lambda=1}^{N} c'^{(3)}_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}\right)^2}{k^2} \tag{13}$$

Имея ввиду условия (10) в равенстве (13) используя результаты работы [4] получим

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} / \tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1) \right\|^2 = \left(1 - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda\right)^2 + \frac{1}{(2\pi N)^8} x_1^2 \sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^8} - \frac{1}{(2\pi N)^6} 2x_1x_3\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^6} +$$

$$+\frac{1}{(2\pi N)^4} x_3^2 \sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4} + \frac{1}{(2\pi N)^6} x_2^2 \sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^6} - \frac{1}{(2\pi N)^4} 2x_2x_4\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4} + \frac{1}{(2\pi N)^2} x_4^2 \sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2} \tag{14}$$

Здесь мы учитывали , что суммы

$$\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\sum_{\lambda=1}^{N} c'_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}\right|^2}{k^8}\ ,\quad \sum_{k\neq 0}\frac{\left|\sum_{\lambda=1}^{N} c'^{(2)}_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}\right|^2}{k^6}\quad \text{и}\quad \sum_{k\neq 0}\frac{\left|\sum_{\lambda=1}^{N} c'^{(1)}_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}\right|^2}{k^4}, \sum_{k\neq 0}\frac{\left|\sum_{\lambda=1}^{N} c'^{(3)}_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}\right|^2}{k^2}$$

достигает своего наименьшего значения, равного соответственно

$$\frac{1}{N^8}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^8}, \frac{1}{N^6}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^6}\quad \text{и}\quad \frac{1}{N^4}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4}\ ,\ \frac{1}{N^2}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}$$

когда узлы $x^{(\lambda)}$ квадратурной формулы (1) равноотстоящие и все коэффициенты $c_\lambda^{'}$ равны между собой , т.е.

$$c_\lambda^{'} = \frac{1}{N},\ c_\lambda^{'(1)} = \frac{1}{N},\ c_\lambda^{'(2)} = \frac{1}{N},\ c_\lambda^{'(3)} = \frac{1}{N} \text{ и } x^{(\lambda)} = \frac{\lambda}{N}, \lambda = \overline{1,N}\,. \tag{15}$$

Теперь правую часть (14) будем рассматривать , как функцию от четырех переменных x_1, x_2, x_3, x_4 и обозначим ее через $y(x_1,x_2,x_3,x_4)$, т.е.

$$y(x_1,x_2,x_3,x_4) = \left(1 - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda\right)^2 + \frac{1}{(2\pi N)^8} x_1^2 \sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^8} - \frac{1}{(2\pi N)^6} 2x_1x_3 \sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^6} +$$
$$+ \frac{1}{(2\pi N)^4} x_3^2 \sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4} + \frac{1}{(2\pi N)^6} x_2^2 \sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^6} - \frac{1}{(2\pi N)^4} 2x_2x_4 \sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4} + \frac{1}{(2\pi N)^2} x_4^2 \sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2} \tag{16}$$

Тогда из необходимого условия экстремума из (16) получим систему уравнений с четремя неизвестными x_1, x_2 и x_3, x_4.

$$y_{x_1}^{'}(x_1,x_2,x_3,x_4) = -2(1-x_1) + \frac{2}{(2\pi N)^8} x_1 \sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^8} - \frac{1}{(2\pi N)^6} 2x_3 \sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^6} = 0$$
$$y_{x_2}^{'}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{(2\pi N)^6} 2x_2 \sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^6} - \frac{1}{(2\pi N)^4} 2x_4 \sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4} = 0$$
$$y_{x_3}^{'}(x_1,x_2,x_3,x_4) = -\frac{2}{(2\pi N)^6} x_1 \sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^6} + \frac{1}{(2\pi N)^4} 2x_3 \sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4} = 0 \tag{17}$$
$$y_{x_4}^{'}(x_1,x_2,x_3,x_4) = -\frac{2}{(2\pi N)^4} x_2 \sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4} + \frac{1}{(2\pi N)^2} 2x_4 \sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2} = 0$$

После некоторых упрощений из (17) получим

$$x_1\left(1 + \frac{1}{(2\pi N)^8}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^8}\right) - \frac{1}{(2\pi N)^6} x_3 \sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^6} = 1, \qquad x_2 \sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^6} = \frac{(2\pi N)^2}{\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^6}} x_4 \sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4},$$

$$x_4\left[(2\pi N)^2 \sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2} - \frac{(2\pi N)^2}{\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^6}{}_4} \sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4}\right] = 0,\ x_4 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = \frac{1}{(2\pi N^2)\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4}} x_1 \sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^6}\,. \tag{18}$$

Решая систему (18) и введя некоторые преобразование , последовательно находим x_1, x_2, x_3 и x_4 т.е.

$$x_1 = \frac{\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4}}{\left[\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4} + \frac{1}{(2\pi)^8 N^8}\left(\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^8} - \left(\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^6}\right)^2\right)\right]}, \qquad x_2 = 0$$

и

$$x_3 = \frac{\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^6}}{(2\pi)^2 N^2\left[\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4} + \frac{1}{(2\pi)^8 N^8}\left(\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^8} - \left(\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^6}\right)^2\right)\right]}, \qquad x_4 = 0 \tag{19}$$

Пусть $c_\lambda^{'} = \frac{1}{N}$, $c_\lambda^{'(1)} = \frac{1}{N}$ и $c_\lambda^{'(2)} = \frac{1}{N}$, $c_\lambda^{'(3)} = \frac{1}{N}$ $\left(\lambda = \overline{1,N}\right)$

тогда из (8) и (15) следует , что

$c_1 = c_2 = \ldots = c_N = c^0$, $c_1^{(1)} = c_2^{(1)} = \ldots = c_N^{(1)} = c^{0(1)}$ и $c_1^{(2)} = c_2^{(2)} = \ldots = c_N^{(2)} = c^{0(2)}$, $c_1^{(3)} = c_2^{(3)} = \ldots = c_N^{(3)} = c^{0(3)}$.

Отсюда следует, что

$$x_1=\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda=Nc^0\ ,\ \ x_2=\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda^{(1)}=Nc^{0(1)}\ \text{ и }\ x_3=\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda^{(2)}=Nc^{0(2)}\ ,\ \ x_4=\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda^{(3)}=Nc^{0(3)}\,. \qquad (20)$$

Подставляя (19) в (20) находим оптимальные коэффициенты квадратурных формул типа Эрмита вида (1), т.е. получим доказательство теоремы.

Список литературы

1. Sard. A. Integral representations of remainders, Duke Math J. 1948. V15, 333 – 345
2. Никольский С.М. К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами успехи математических наук, 1950, Т.5, вып 2 (36), с. 165 – 177.
3. Соболев С.Л., Введение в теорию кубатурных формул, М.Наука, 1974г. 808 с.
4. Женсыкбаев А.А., Наилучшая квадратурная формула для некоторых классов
5. периодических дифференцируемых функций. Изв. АН СССР, серия матем., 1977,
6. 41, №5, с.1110 – 1124.
7. Жалолов О.И, Косимов А.А. Оптимальные по порядку сходимости весовые кубатурные формулы типа Эрмита в пространстве $\overline{L}_2^{m}(K_n)$ // Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2015. -№3. -С.24- 33.
8. Жалолов О.И. Вычисление нормы функционала погрешности оптимальных интерполяционных формул в пространстве периодических функций С.Л.Собовева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$. Проблемы вычислительной и прикладной математики. // Научный журнал. -№2.-2015 декабр.-Ташкент.-53-58ст.
9. Жалолов О.И. Верхная оценка нормы функционала погрешности кубатурной формуы типа Эрмита в пространстве С.Л.Соболева // Проблемы вычислительной и прикладной математики. Научный журнал. -№3.2017. -Ташкент. -70-78 ст.

УДК 517.518.644

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ХЁРМАНДЕРА $H_2^\mu(R)$

Шадиметов Х.М., Жалолов Ик.И.

Ташкентский государственный транспортный университет.

Настоящая работа посвящена нахождением в явном виде оптимальных коэффициентов весовых квадратурных формул в пространстве Хёрмандера $H_2^\mu(R)$ при $m=1,2$.

Определение. Пространство $H_2^\mu(R)$ определяется как замыкание бесконечно дифференцируемых функций, заданных в R и убывающих на бесконечность быстрее любой отрицательной степени в норме (см. [1,2])

$$\left\| f(x)\middle| H_2^\mu(R)\right\|=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|F^{-1}\left[(1+y^2)^{m/2}\cdot F\left[f(x)\right](y)\right]\right|^2dx\right\}^{1/2}. \qquad (1)$$

Имеется следующая теорема из работы [4], которая используется в дальнейшем

Теорема 1. Функция $u^m(h\beta)$ имеет вид

$$u_h^m[\beta]=\left\{f_m[\beta],\ h\beta\in[0,1],\ \sum_{\alpha=0}^{N}C[\alpha]v_m(h\alpha-h\beta),\ h\beta\notin[0,1]\right. . \qquad (2)$$

где

$$f_m[\beta]=\int_0^1 p(y)\cdot v_m(h\beta-y)dy. \qquad (3)$$

$$\nu_m(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp 2\pi iyx(1+y^2)^m dy=\frac{\pi\exp(-2\pi|x|)}{2^{2m-2}\cdot(m-1)!}\sum_{k=o}^{m-1}\frac{(2m-k-2)!\cdot(4\pi)^k}{k!\cdot(m-k-1)!}|x|^k. \quad \text{(см. [3])}$$

(4)

При вычислении коэффициентов $C[\beta]$ нам необходимо знать конкретные значения $u^m(h\beta)$ при $h\beta\notin[0,1]$. Как видно из (2), из вида функции $u^m(h\beta)$ невозможно определить конкретные значения $u^m(h\beta)$, при $h\beta\notin[0,1]$, так как в нем участвуют $N+1$ неизвестные $C[\beta]$, конкретные значения $u^m(h\beta)$ будут определены в ходе вычисления коэффициентов $C[\beta]$, когда будет известна функция $D_h^m[\beta]$.

Построен оператор $D_m(h\beta)$ в случае m=2 в работе [4] и с этой работы известно, что

Задача B_3. Найти решения уравнения

$$D_2(h\beta)*u_2(h\beta)=0, h\beta\notin[0,1] \tag{5}$$

в виде

$$u_2(h\beta)=\begin{cases}\ell^{2\pi h\beta}\left(a_1^-+a_2^-h\beta\right),\beta\le 0\\ f_2[\beta], \qquad\qquad 0\le\beta\le N.\\ \ell^{-2\pi h\beta}\left(a_1^++a_2^+h\beta\right),\beta\ge N\end{cases} \tag{6}$$

Неизвестные a_1^-,a_2^-,a_1^+,a_2^+ можно найти из уравнения (5),используя функцию $D_2(h\beta)$.Тогда явный вид функции $u_2(h\beta)$ и коэффициенты C_β может быть найдены. Таким образом задача B_3 и соответственно задачи B_2 и B_1 может быть решены (см. [1,4]).

Рассмотрим квадратурную формулу вида

$$\int_0^1 p(x)f(x)dx\approx\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta f(x_\beta),$$

(7)

с функционалом погрешности

$$l_N(x)=\varepsilon_{[0,1]}(x)p(x)-\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta\delta(x-x_\beta). \tag{8}$$

где C_β--коэффициенты, x_β--узлы квадратурной формулы, $x_\beta\in[0,1]$, $p(x)$--интегрируемая функция, $f(x)\in H_2^\mu(R)$. Здесь $\varepsilon_{[0,1]}(x)$--индикатор отрезка $[0,1]$, $\delta(x)$--дельта- функция Дирака.

Теорема 2. Оптимальные коэффициенты квадратурных формул (7) который минимизирует норму функционала погрешности (8) с равно расположенными узлами в пространстве Хёрмандера $H_2^\mu(R)$ при $m=2$ имеют следующий вид

$$C[\beta]=\rho\begin{cases}\left\{Af_2(h\beta)+(1+A_1)\left[f_2(h(\beta-1))+f_2(h(\beta+1))\right]+\frac{A_1}{\lambda_1}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_1^{|\beta-\gamma|}f_2(h\gamma)+\lambda_1^\beta T_1+T_2\lambda_1^{N-\beta}\right]\right\},\beta=\overline{1,N-1}\\ \left\{Af_2(0)+(1+A_1)\left[f_2(h)+\ell^{-2\pi h}\left(a_1^--a_2^-h\right)\right]+\frac{A_1}{\lambda_1}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_1^\gamma f_2(h\gamma)+T_1+\lambda_1^NT_2\right]\right\},\beta=0\\ \left\{Af_2(1)+(1+A_1)\left[f_2(1-h)+\ell^{-2\pi(1+h)}\left(a_1^++a_2^+(1+h)\right)\right]+\frac{A_1}{\lambda_1}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_1^{N-\gamma}f_2(h\gamma)+\lambda_1^NT_1+T_2\right]\right\},\beta=N\end{cases}$$

где

$$T_1=\frac{\lambda_1 f(0)}{e^{2\pi h}-\lambda_1}-a_2^-\frac{\lambda_1 he^{2\pi h}}{\left(e^{2\pi h}-\lambda_1\right)^2}, \tag{9}$$

$$T_2=\frac{\lambda_1 f(1)}{e^{2\pi h}-\lambda_1}+a_2^+\frac{e^{-2\pi}\lambda_1 h e^{2\pi h}}{\left(e^{2\pi h}-\lambda_1\right)^2}, \tag{10}$$

a_1^-, a_1^+, a_2^- и a_2^+ определяются из (5)

Доказательство. С начало найдем два неизвестных a_1^- и a_1^+.

Из (3) и (6) при $\beta=0$ и $\beta=N$ получим $u_2(0)=f_2(0)=a_1^-$. отсюда

$$a_1^-=f_2(0),\ f_2(0)=\int p(y)\gamma_2(y)dy \tag{11}$$

и

$$u_2(1)=f_2(1)=\ell^{-2\pi}\left(a_1^+ + a_2^+\right), \text{ т.е}$$

$$a_1^+=\ell^{2\pi}f_2(1)-a_2^+,\ f_2(1)=\int p(y)\gamma_2(1-y)dy. \tag{12}$$

Теперь имеем два неизвестных a_2^+ и a_2^-. Эти неизвестные найдем из (5) когда $\beta=-1$ и $\beta=N+1$. Учитывая равенство (6) из (5) имеем

$$D_2(h\beta)*u_2(h\beta)=\sum_{\gamma=-\infty}^{\infty}D_2(h\beta-h\gamma)u_2(h\gamma)=\sum_{\gamma=-\infty}^{-1}D_2(h\beta-h\gamma)\left(a_1^-\ell^{2\pi h\gamma}+a_2^-h\gamma\ell^{2\pi h\gamma}\right)+$$
$$+\sum_{\gamma=0}^{N}D_2(h\beta-h\gamma)f_2(h\gamma)+\sum_{\gamma=N+1}^{\infty}D_2(h\beta-h\gamma)\left(a_1^+\ell^{-2\pi h\gamma}+a_2^+h\gamma\ell^{-2\pi h\gamma}\right)=0, \tag{13}$$

где β<0 и β>N.

Преобразуя (13) получим

$$\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h\beta+h\gamma)\left(a_1^-\ell^{-2\pi h\gamma}-a_2^-h\gamma\ell^{-2\pi h\gamma}\right)+\sum_{\gamma=0}^{N}D_2(h\beta-h\gamma)f_2(h\gamma)+$$
$$+\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2\left(h\beta-h(N+\gamma)\right)\left(a_1^+\ell^{-2\pi h(N+\gamma)}+a_2^+h(N+\gamma)\ell^{-2\pi h(N+\gamma)}\right)=0,$$

(14)

отсюда при $\beta=-1$ и $\beta=N+1$ получим систему для $a_1^-, a_2^-, a_1^+, a_2^+$:

$$-a_2^-\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h\gamma-h)(h\gamma)\ell^{-2\pi h\gamma}+a_2^+\ell^{-2\pi}\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2\left(h(N+\gamma)+h\right)(h\gamma)\ell^{-2\pi h\gamma}=$$
$$-\sum_{\gamma=0}^{N}D_2(h\gamma+h)f_2(h\gamma)-f_2(0)\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h\gamma-h)\ell^{-2\pi h\gamma}-\ell^{2\pi}f_2(1)\ell^{-2\pi}\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2\left(h(N+\gamma)+h\right)\ell^{-2\pi h\gamma}. \tag{15}$$

$$a_2^-\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2\left(h(N+\gamma)+h\gamma\right)(h\gamma)\ell^{-2\pi h\gamma}+a_2^+\ell^{-2\pi}\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h\gamma-h)(h\gamma)\ell^{-2\pi h\gamma}=$$
$$-\sum_{\gamma=0}^{N}D_2\left(h(N+1)-h\gamma\right)f_2(h\gamma)-f_2(0)\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2\left(h(N+1)+h\gamma\right)\ell^{-2\pi h\gamma}-f_2(1)\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h\gamma-h)\ell^{-2\pi h\gamma}. \tag{16}$$

Так как $|\lambda_1|$<1 то ряды в системе (15) и (16) являются сходящимся. Используя (11),(12) после некоторых вычислений и упрощений из (15) и (16) получим

$$\begin{cases} d_{11}a_2^- + d_{12}a_2^+ = V_1 \\ d_{21}a_2^- + d_{22}a_2^+ = V_2 \end{cases}, \qquad (17)$$

Где $d_{11} = \frac{1}{\lambda_1} h\ell^{2\pi h}$; $d_{12} = -h\ell^{-2\pi}\lambda_1^{N+1}\ell^{2\pi h}$; $d_{21} = h\lambda_1^{N+1}\ell^{2\pi h}$; $d_{22} = -\frac{1}{\lambda_1} h\ell^{-2\pi}\ell^{2\pi h}$

(18)

$$V_1 = \left(\ell^{2\pi h} - \lambda_1\right)\left[\left(\ell^{2\pi h} - \lambda_1\right)\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_1^{\gamma} f\left(h\gamma\right) + \frac{1}{\lambda_1} f_2\left(0\right) + \lambda_1^{N+1} f_2\left(1\right)\right], \qquad (19)$$

$$V_2 = \left(\ell^{2\pi h} - \lambda_1\right)\left[\left(\ell^{2\pi h} - \lambda_1\right)\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_1^{N-\gamma} f_2\left(h\gamma\right) + \lambda_1^{N+1} f_2\left(0\right) + \frac{1}{\lambda_1} f_2\left(1\right)\right]. \qquad (20)$$

Отсюда получим

$$a_2^- = \frac{V_1 d_{22} - V_2 d_{12}}{d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}}, \quad a_2^+ = \frac{V_2 d_{11} - V_1 d_{21}}{d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}}. \qquad (21)$$

Комбинируя (9),(10) и (21) получим явное значение a_2^+ и a_2^-.

Теперь вычислим коэффициенты $C_\beta, \beta = 0,1,2,\ldots,N$.

Учитывая (6) для C_β имеем

$$C_\beta = D_2\left(h\beta\right) * u_2\left(h\beta\right) = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} D_2\left(h\beta - h\gamma\right)u_2\left(h\gamma\right) = \sum_{\gamma=-\infty}^{-1} D_2\left(h\beta - h\gamma\right)u_2\left(h\gamma\right) + \sum_{\gamma=0}^{N} D_2\left(h\beta - h\gamma\right)u_2\left(h\gamma\right) +$$

$$\sum_{\gamma=N+1}^{\infty} D_2\left(h\beta - h\gamma\right)u_2\left(h\gamma\right) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_2\left(h\beta + h\gamma\right)\left(a_1^-\ell^{-2\pi h\gamma} - a_2^- h\gamma\ell^{-2\pi h\gamma}\right) + \sum_{\gamma=0}^{N} D_2\left(h\beta - h\gamma\right) f_2\left(h\gamma\right) +$$

$$+\sum_{\gamma=1}^{\infty} D_2\left(h\beta - h\left(N+\gamma\right)\right)\left(a_1^+\ell^{-2\pi h\left(N+\gamma\right)} + a_2^+ h\left(N+\gamma\right)\ell^{-2\pi h\left(N+\gamma\right)}\right) =$$

$$= \sum_{\gamma=0}^{N} D_2\left(h\beta - h\gamma\right) f_2\left(h\gamma\right) + \lambda_1^{\beta}\sum_{\gamma=1}^{\infty}\frac{A_1\rho}{\lambda_1}\lambda_1^{\gamma}\left(a_1^-\ell^{-2\pi h\gamma} - a_2^- h\gamma\ell^{-2\pi h\gamma}\right) +$$

$$\lambda_1^{N-\beta}\ell^{-2\pi}\sum_{\gamma=1}^{\infty}\frac{A_1\rho}{\lambda_1}\lambda_1^{\gamma}\left(a_1^+\ell^{-2\pi h\gamma} + a_2^+\left(1 + h\gamma\right)\ell^{-2\pi h\gamma}\right).$$

(22)

Где $\rho = \frac{2}{\pi\left(2\pi h ch 2\pi h - sh 2\pi h\right)}$ (23)

Обозначая $\sum_{\gamma=1}^{\infty}\frac{A_1\rho}{\lambda_1}\lambda_1^{\gamma}\left(a_1^-\ell^{-2\pi h\gamma} - a_2^- h\gamma\ell^{-2\pi h\gamma}\right) = T_1$ и $\ell^{-2\pi}\sum_{\gamma=1}^{\infty}\frac{A_1\rho}{\lambda_1}\lambda_1^{\gamma}\left(a_1^+\ell^{-2\pi h\gamma} + a_2^+\left(1 + h\gamma\right)\ell^{-2\pi h\gamma}\right) =$

T_2

из (22) получим

$$C_\beta = \sum_{\gamma=0}^{N} D_2\left(h\beta - h\gamma\right) f_2\left(h\gamma\right) + T_1\lambda_1^{\beta} + T_2\lambda_1^{N-\beta}. \qquad (24)$$

где T_1 и T_2 после некоторых вычислений имеет следующий вид:

$$T_1 = A_1\rho\left(\frac{1}{\ell^{2\pi h} - \lambda_1}\left(a_1^- - a_2^-\frac{h\ell^{2\pi h}}{\ell^{2\pi h} - \lambda_1}\right)\right) \quad \text{и} \quad T_2 = A_1\rho\ell^{-2\pi}\left(\frac{1}{\ell^{2\pi h} - \lambda_1}\left(a_1^+ + a_2^+\left(1 + \frac{h\ell^{2\pi h}}{\ell^{2\pi h} - \lambda_1}\right)\right)\right).$$

(25)

В (24) теперь вычислим следующую величину

$$\sum_{\gamma=0}^{N} D_2(h\beta-h\gamma)\,f_2(h\gamma)=D_2(0)\,f_2(h\beta)+D_2(h)\Big[f_2\big(h(\beta-1)\big)+f_2\big(h(\beta+1)\big)\Big]+$$

$$\sum_{\gamma=0}^{\beta-1}A_1\lambda_1^{|\gamma|-1}f_2(h\gamma)+\sum_{\gamma=\beta+2}^{N}A_1\lambda_1^{|\gamma|-1}f_2(h\gamma). \qquad (26)$$

Из (26) получим

$$\sum_{\gamma=0}^{N} D_2(h\beta-h\gamma)\,f_2(h\gamma)=Af_2(h\beta)+(1+A_1)\Big[f_2\big(h(\beta-1)\big)+f_2\big(h(\beta+1)\big)\Big]+$$

$$\sum_{\gamma=0}^{\beta-1}A_1\lambda_1^{|\gamma|-1}f_2(h\gamma)+\sum_{\gamma=\beta+2}^{N}A_1\lambda_1^{|\gamma|-1}f_2(h\gamma)=Af_2(h\beta)+(1+A_1)\Big[f_2\big(h(\beta-1)\big)+f_2\big(h(\beta+1)\big)\Big]+$$

$$\frac{A_1}{\lambda_1}\left[\sum_{\gamma=0}^{\beta-1}\lambda_1^{\gamma}f_2(h\gamma)+\sum_{\gamma=\beta+2}^{N}\lambda_1^{\gamma}f_2(h\gamma)\right],$$

(27)

где

$$A=2\left(\frac{2\pi h-sh2\pi hch2\pi h}{2\pi hch2\pi h-sh2\pi h}-4ch2\pi h\right)+\frac{A_1}{\lambda_1}.$$

Таким образом учитывая вышеизложенных из (24) получим

$$C[\beta]=\ \rho\left\{Af_2(h\beta)+(1+A_1)\Big[f_2\big(h(\beta-1)\big)+f_2\big(h(\beta+1)\big)\Big]+\frac{A_1}{\lambda_1}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_1^{|\beta-\gamma|}f_2(h\gamma)+\lambda_1^{\beta}T_1+T_2\lambda_1^{N-\beta}\right]\right\},\beta=1,2,...,N-1$$

(28)

При вычисление T_1 и T_2 мы учли ,что $|\lambda_1|<1$,то бесконечные ряды в обозначениях (15) и (16) является сходящимися. Из (28) видно **,**что для того чтобы получить точное выражение оптимальных коэффициентов C_β ,достаточно найти T_1 и T_2.

При нахождение точное значение T_1 и T_2 необходимо найти a_2^- и a_2^+.

Из (15) и (16) используя (18)-(21) мы можем вычислить точное значение a_2^- и a_2^+, тогда имеем

$$a_2^-=\frac{\left(\ell^{2\pi h}-\lambda_1\right)\left[\left(\ell^{2\pi h}-\lambda_1\right)\sum_{\gamma=0}^{N}\left(\lambda_1^{2N-\gamma+1}-\lambda_1^{\gamma-1}\right)f_2(h\gamma)\frac{1}{\lambda_1^{-2}-\lambda_1^{2(N+1)}}+\frac{1}{\pi}\left(1-(1+\pi)\,\ell^{-2\pi}\right)\right]}{h\ell^{2\pi h}} \quad \text{и}$$

$$a_2^+=\frac{\left(\ell^{2\pi h}-\lambda_1\right)\left[\left(\ell^{2\pi h}-\lambda_1\right)\lambda_1^{N}\sum_{\gamma=0}^{N}\left(\lambda_1^{-\gamma-1}-\lambda_1^{\gamma+1}\right)f_2(h\gamma)\frac{1}{\lambda_1^{2(N+1)}-\lambda_1^{-2}}-\frac{1}{\pi}\left(1-(1+\pi)\,\ell^{-2\pi}\right)\right]}{\ell^{-2\pi}h\ell^{2\pi h}},$$

(29)

где $|\lambda_1|<1.$

С учетом (11),(12) получим

$$a_1^-=f_2(0)=\frac{1}{\pi}\Big[1-(1+\pi)\,\ell^{-2\pi}\Big] \quad \text{и} \quad a_1^+=\ell^{2\pi}f_2(1)-a_2^+=\frac{1}{\pi}\Big[\ell^{2\pi}-\pi-1\Big]-a_2^+.$$

(30)

Учитывая выше изложенных из (25) получим

$$T_1=A_1\rho\left(\frac{1}{\ell^{2\pi h}-\lambda_1}(a_1^--a_2^-\frac{h\ell^{2\pi h}}{\ell^{2\pi h}-1})\right)=A_1\rho\ \frac{\left[\sum_{\gamma=0}^{N}\left(\lambda_1^{2N-\gamma+1}-\lambda_1^{\gamma-1}\right)f_2(h\gamma)\right]}{\lambda_1^{-2}-\lambda_1^{2(N+1)}} \qquad (31)$$

и

$$T_2 = A_1\rho\ell^{-2\pi}\left(\frac{1}{\ell^{2\pi h}-\lambda_1}\left(a_1^+ + a_2^+\left(1+\frac{h\ell^{2\pi h}}{\ell^{2\pi h}-\lambda_1}\right)\right)\right) = A_1\rho\lambda_1^N \cdot \frac{\left[\sum_{\gamma=0}^{N}\left(\lambda_1^{-\gamma-1}-\lambda_1^{\gamma+1}\right)f_2(h\gamma)\right]}{\lambda_1^{2(N+1)}-\lambda_1^{-2}} . \quad (32)$$

Подставляя (31) и (32) в (28) получим

$$C[\beta] = \rho\left\{Af_2(h\beta)+(1+A_1)\left[f_2(h(\beta-1))+f_2(h(\beta+1))\right]+\frac{A_1}{\lambda_1}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_1^{|\beta-\gamma|}f_2(h\gamma)+\frac{\left[\sum_{\gamma=0}^{N}\left(\lambda_1^{2N-\gamma+1}-\lambda_1^{\gamma-1}\right)f_2(h\gamma)\right]}{\lambda_1^{-2}-\lambda_1^{2(N+1)}}\lambda_1^{\beta}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\left[\sum_{\gamma=0}^{N}\left(\lambda_1^{N-\gamma-1}-\lambda_1^{N+\gamma+1}\right)f_2(h\gamma)\right]}{\lambda_1^{-2}-\lambda_1^{2(N+1)}}\lambda_1^{N-\beta}\ \right]\right\}, \beta = 1,2,...,N-1.$$

(33)

Из (33) при $\beta = 0$ и $\beta = N$ имея в виду (31) и (32) получим

$$C[0] = \rho\left\{Af_2(0)+(1+A_1)\left[f_2(h)+\ell^{-2\pi h}\left(a_1^- - a_2^- h\right)\right]+\frac{A_1}{\lambda_1}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_1^{\gamma}f_2(h\gamma)+T_1+\lambda_1^N T_2\right]\right\}, \quad (34)$$

$$C[N] = \rho\left\{Af_2(1)+(1+A_1)\left[f_2(1-h)+\ell^{-2\pi(1+h)}\left(a_1^+ + a_2^+(1+h)\right)\right]+\frac{A_1}{\lambda_1}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_1^{N-\gamma}f_2(h\gamma)+\lambda_1^N T_1+T_2\right]\right\}. \quad (35)$$

Теорема доказана.

Отметим, что получены подобные результаты в случае $m=1$.

Теорема 3. Среди всех квадратурных формул вида (7) с оптимальными коэффициентами который минимизирует норму функционала погрешности (8) с равно расположенными узлами в пространстве Хёрмандера $H_2^{\mu}(R)$ при m=1 и $p(x)=1$ имеет вид

$$\overset{0}{C}[\beta] = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\exp(2\pi h)-1}{2\pi\left(\exp(\pi h)+1\right)}, если\,\beta = 0 \\ \dfrac{1}{\pi sh(2\pi h)}\left[ch(2\pi h)-1\right], если\,\beta = \overline{1, N-1} \\ \dfrac{\exp(2\pi h)-1}{\pi\left(\exp(\pi h)+1\right)}, если\,\beta = N \end{array}\right\}$$

тогда, оптимальная квадратурная формула является

$$\int_0^1 f(x)dx \cong \frac{1}{\pi sh(2\pi h)}\left[ch(2\pi h)-1\right]\sum_{\beta=1}^{N-1}f(h\beta), \quad (36)$$

где $h = \dfrac{1}{N}$.

Численные результаты. В качестве подынтегральной функций возьмем, например,

$$f_1(x) = \cos x, \qquad f_2(x) = e^x, \qquad f_3(x) = \frac{1}{1+x^4}$$

Точные значения интегралов соответственно обозначим через

$$I_1 = \int_J^1 \cos x dx, \qquad I_2 = \int_0^1 e^x dx, \qquad I_3 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^4}dx$$

Эти интегралы приближенно вычисляем с помощью оптимальной квадратурной формулы, построенной в настоящей работе в случаях $m=1$ при $N = 10;100;1000;10000$.

Список литературы

1. Жалолов О.И, С.И.Ибрагимов, Б.Р.Абдуллаев. Оценка погрешности кубатурных формул общего вида над фактор- пространством Соболева // WORLD Science "Topical researches of the World science" —June 20 – 21, 2015, —Dubai, UAE).
2. Жалолов О.И, Косимов А.А. Оптимальные по порядку сходимости весовые кубатурные формулы типа Эрмита в пространстве $\overline{L}_2^m(K_n)$ // Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2015. -№3. -С.24- 33.
3. Жалолов О.И. Вычисление нормы функционала погрешности оптимальных интерполяционных формул в пространстве периодических функций С.Л.Собовева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$. Проблемы вычислительной и прикладной математики. // Научный журнал. -№2.-2015 декабр.- Ташкент.-53-58ст.
4. Жалолов О.И., Г.А.Акмалова. Оптимальные по порядку сходимости весовые кубатурные формулы в пространстве Соболева // «ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ». Материалы IX Международной научно-практической конференции. -Том 1. 11 марта 2015 г., -Россия, г. -Санкт-Петербург. -182-191ст.
5. Шадиметов Х. М, Жалолов О.И, Шадманова К.У., Шамсиев Ж. Ш. Оптимальные по порядку сходимости весовые кубатурные формулы типа Эрмита в пространстве Соболева // East European Scientific Journal. Wydrukowano w «Aleje Jerozolimskie . 85/21, 02-001 Warszawa, Polska». -2016. -162ст.
6. Жалолов О.И, И.Ф. Жалолов. Об одной асимптотической оптимальной кубатурной формуле // «Молодой учёный» Международный научный журнал. г.Казань. -№ 10 (114) . Май, -2016 г.
7. Шадиметов ХМ., Жалолов О.И. Вычисление нормы функционала погрешности и построение оптимальных по порядку сходимости весовых кубатурных формул типа Эрмита в пространстве Соболева // Проблемы вычислительной и прикладной математики. Научный журнал. -№1.2016 март. -Ташкент. -100-106 ст.
8. Жалолов О.И. Об одной весовой оптимальной по порядку сходимости кубатурной формуле в пространстве $L_p^{(m)}(K_n)$ // «Молодой учёный» Международный научный журнал. г. Казань. -№ 13 (117) . -Июль, -2016 г.
9. Жалолов О.И., Абдуллаев Б.Р. Построение оптимальных квадратурных формул типа Эрмита в пространстве периодических функций С.Л.Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_n)$. // «Молодой учёный» Международный научный журнал. -г.Казань. -№ 11 (145) . февраль, -2017 г.
10. Жалолов О.И., Боборахимова М. И. Алгоритм построения дискретного аналога одного оператора $D_4[\beta]$ // «Молодой учёный» Международный научный журнал. -г.Казань. -№ 11 (145) . февраль, -2017 г.
11. Жалолов О.И. Верхная оценка нормы функционала погрешности кубатурной формуы типа Эрмита в пространстве С.Л.Соболева // Проблемы вычислительной и прикладной математики. Научный журнал. -№3.2017. -Ташкент. -70-78 ст.
12. Жалолов О.И. О существовании наилучших кубатурных формул общего вида над пространством С.Л.Соболева // Universum:технические науки: электрон. научн. журн. 2020. № 11(80).
13. OI Jalolov, KU Khayatov. Top evaluation for the rate of functional of error weight cubature formula in space // Scientific reports of Bukhara State University. 2020. №3(4),.32-37p
14. Жалолов О.И. Наилучшая весовая кубатурная формула над пространством С.Л.Соболева // Сибирский федеральный университет. 2011г.
15. З.Ш. Жумаев, О.И. Жалолов. Анализ алгебраических моделей коэффициента турбулентной вязкости при исследовании круглых турбулентных струй реагирующих газов // Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании. Усть-Каменогорск, Казахстан.2003г. 11-14ст.

16. Хаятов Х. У., Жураева Л. И., Жураев З. Ш. Основные понятия теории нечетких множеств // Молодой ученый. — 2019. — № 25 (263). — С. 41-44.
17. Хаятов Х.У, Жалолова Н.Х. О нахождении нормы функционала погрешности интерполяционных формул типа эрмита в периодическом пространстве // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2017. — № 4 (10). — С. 98-103.
18. Хаятов, Х. У. Оценка погрешности кубатурных формул общего вида над фактор-пространством Соболева// Молодой ученый. — 2016. — № 13 (117). — С. 58-60.
19. Хаятов Х.У. Некоторые вопросы теоремы вложения в классах периодических обобщенных функций в пространств // Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии — 2016. — № 4 (32). — С. 51-57.
20. Хаятов Х.У., Очилова Н.Т. Об одном погрешности весовых кубатурных формул в Пространстве $\tilde{C}^{(m)}T_n$ // Сибирский федеральный университет. — 2011.
21. Хаятов Х.У. Об одной погрешности весовых кубатурных формул в пространстве // Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии — 2016. — № 4 (32). — С. 58-62.
22. Хаятов Х.У., Тахиров Б.Н. Постановка обратной задачи для уравнений математической физики. // Academy. 2020. №10 (61). — С. 32-35.