Моя профессиональная карьера

Научно-образовательный электронный журнал

ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ

Выпуск №26 (том 6)
(май, 2022)

Международный научно-образовательный

электронный журнал

«ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ»

УДК 37

ББК 94

Международный научно-образовательный электронный журнал «ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ». Выпуск №26 (том 6) (май, 2022). Дата выхода в свет: 31.05.2022.

Сборник содержит научные статьи отечественных и зарубежных авторов по экономическим, техническим, философским, юридическим и другим наукам.

Миссия научно-образовательного электронного журнала «ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ» состоит в поддержке интереса читателей к оригинальным исследованиям и инновационным подходам в различных тематических направлениях, которые способствуют распространению лучшей отечественной и зарубежной практики в интернет пространстве.

Целевая аудитория журнала охватывает работников сферы образования (воспитателей, педагогов, учителей, руководителей кружков) и школьников, интересующихся вопросами, освещаемыми в журнале.

Материалы публикуются в авторской редакции. За соблюдение законов об интеллектуальной собственности и за содержание статей ответственность несут авторы статей. Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов статей. При использовании и заимствовании материалов ссылка на издание обязательна.

ФИО автора: *Shukurova Mubashiraxon Furqatovna*
Buxoro davlat universiteti
Fizika-matematika fakul’teti magistri
Название публикации: «KASR TARTIBLI INTEGRALLAR TO’G’RISIDA BOSHLANG’ICH TUSHUNCHALAR VA ULARNING QO’LLANILISHI HAQIDA»

Annotasiya. Maqolada kasr tartibli integrallarning kelib chiqish tarixi haqida qisqacha ma'lumotlar keltirilgan. Bunda har bir olimning hissasi alohida-alohida aytib o‘tilgan. Gyol'der sinfi to‘g‘risida tushunchalar berilgan. Kasr tartibli integrallarning sodda xossalari bayon qilingan va ayrim elementlar funksiyalarning integrallarini hisoblash yo‘llari ko‘rsatilgan.

Kalit so‘zlar: darajali funksiya, kesma, Gyolder ko'rsatkichi, Lipshits sinfi, o'lchanadigan funksiyalar, kasr tartibli integral, Abel integrali, matematik induktsiya, butun son, operatorlar, Betta va Gamma funksiyalari.

НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ ОБ ИНТЕГРАЛАХ ДРОБНОГО ПОРЯДКА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Шукурова Мубаширахон Фуркатовна
Физика-математический факультет,
Бухарский государственный университет

Аннотация. В статье кратко изложена история возникновения интегралов дробного порядка. Вклад каждого ученого отмечено отдельно. Приведены понятия класса Гельдера. Описаны простые свойства интегралов дробного порядка, а также указаны способы вычисления интегралов ряд элементарных функций.

Ключевые слова: степенная функция, отрезок, показатель Гёльдера, класс Липшица, измеримые функции, интеграл дробного порядка, интеграл Абеля, математическая индукция, целые числа, операторы, функции Бета и Гамма.

$\frac{d^p f(x)}{dx^p}$ ning butun bo'lmagan (kasr) qiymatlariga differentsial tushunchasini umumlashtirish g'oyasi integral hisob-kitobdan oldin paydo bo'lgan. Tarixda bunday g'oyani muhokama qilishga birinchi urinishi G. Leybnitsning yozma ishlarida mavjud. G.Leybnitsning ikkita funksiyani o’zgarishini hisoblash, y’ani differensiallash haqidagi teoremaga oid xatlaridan birida J. Bernuli ushbu teorema differensiallashning butun bo'lmagan (kasr) tartibida bo'lganida teoremaning ahamiyati haqida so'ragan.

Bundan tashqari, G. Leybnits G. Lopitalga (1695) va Uollisga (1697) maktublarida, 1/2 tartibli differensiallar va hosilalarni ko'rib chiqish imkoniyati to'g'risida bir necha bor izoh bergan.

Birinchi qadam L. Eyler tomonidan amalga oshirilgan deyish mumkin. O’z o’rnida darajali funksiyasining ($\frac{d^p y}{dx^p}$) kasr tartibli differensialini hisoblash natijasi P. P. Laplasning butun bo'lmagan soniga ma'no berish mumkinligi haqida fikrlar bayon qilganligini unutmaslik lozim.

S. Lakroix

$$\int T(t)t^{-x}dt$$

bilan ifodalangan funksiyalarning butun bo'lmagan sonini differensiallash imkoniyatini taklif qilgan $\frac{d^{1/2}y}{dx^{1/2}}$ ni darajali funksiyasidan olishning aniq formulasi takrorlangan

$$\int_a^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^\mu} = f(x), \qquad x > a, \qquad 0 < \mu < 1.$$

Keyingi bosqichda

$$\frac{d^p f(x)}{dx^p} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^p d\lambda \times \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, cos\left(tx - t\lambda + \frac{p\pi}{2}\right) dt$$

tenglikni qo'llashni taklif etgan.

Yuqorida qayd qilingan ma’lumotlarni kasrl tartibli integral tenglama bilan bog'liq holda N. Abelning ilmiy asarlarida uchratish mumkin:

$$\int_a^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{\mu}} = f(x), \qquad x > a, \qquad 0 < \mu < 1.$$

Aytish joizki, kasr tartibli integrallarni o'rganishda Gyolder sinflari muhim rol o'ynaydi. Ushbuni inobatga olib $\mathrm{H}_0^{\lambda}(\mathrm{p})$ va $\mathrm{L_p}(\mathrm{p})$ sinflar haqida tushunchalarni taqdim etamiz [1].

$\mathbf{H}^{\boldsymbol{\lambda}}$ va $\mathbf{H}^{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{p})$sinflar. $\Omega = [a, b\,]$ bo'lsin, bu erda $-\infty \le a \le b \le \infty$. Ω chegaralangan kesma, yarim o'q yoki butun o'q bo'lishi mumkin. Agar yarim va butun o'qlar bo'lsa, odatdagidek, biz $\mathrm{R}^1 = [-\infty, \infty), \mathrm{R}_+^1 = [0, \infty)$ va R^1 bilan bitta cheksiz to'g'ri chiziqni belgilaymiz. Gyolderning sinflarini chegaralangan kesmada qaraymaiz.

Ω da aniqlangan $f(x)$ funksiya Ω sohasida

$$|f(x_1) - \ f(x_2)| \le A|x_1 - x_2\,|^{\lambda}$$

shartni qanoatlantirsin. Ushbu shartni qanoatlantirvchi funksiyalar Gyolderning sinfiga tegishli deyiladi.

Barcha $x_1, x_2 \in \Omega$, uchun, A doimiy va λ - Gyolder ko'rsatkichi deyiladi.

$\mathrm{H}^1(\Omega)$ sinfi ko'pincha Lipshits sinfi deb nomlanadi.

Kasrli tartibli intagral tushunchasi Abel integral tenglamasi bilan chambarchas bog'liq, shuning uchun ushbu tenglamani yechishdan boshlash qulay. Birinchidan, integrallanuvchi funksiyalar sinfiga formal yechimlarni beramiz. Abel tenglamasini yechimidan foydalanib, konstruktiv ravishda kasr tartibli integralning teskari operatsiyasi sifatida foydalanish mumkin.

KASR TARTIBLI INTEGRALNING TA'RIFI VA XOSSALARI

Integral tenglamani

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x), \qquad x > \ a$$

qaraylik, bu erda $0 < a < 1$. Bu tenglamaga Abel tenglamasi deyiladi, biz $a > -\infty$ deb hisoblaymiz.

Ushbu tenglama quyidagi usul bilan echiladi: x ni t ga, t ni s ga mos ravishda o'zgartirib, tenglikning ikkala tomonini $(x-t)^{-\alpha}$ ga ko'paytiramiz va birlashtiramiz:

$$\int_a^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha}\int_a^t \frac{\varphi(s)ds}{(t-s)^{1-\alpha}} = \Gamma(\alpha)\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha}.$$

Chap tarafdagi integralni tartibini Direxli formulasiga ko'ra o'zgartirib, quyidagi tenglikka topamiz:

$$\int_a^x \varphi(s)ds\int_s^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha\,(t-s)^{1-\alpha}} = \Gamma(\alpha)\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha}\ .$$

$t\ =\ s\ +\ \tau\,(x-s)$ ni almashtirish bajarib, ichki integralni osonlikcha hisoblash mumkin:

$$\int_s^x (x-t)^{-\alpha}(t-s)^{\alpha-1}dt = \int_0^1 \tau^{\alpha-1}\,(1-\tau)^{-\alpha}d\tau =$$

$$= \mathrm{B}(\alpha, 1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha).$$

shuning uchun

$$\int_a^x \varphi(s)ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha}.$$

Ushbu ifodani differensiallab

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha}$$

bo’lishini topamiz.

Abel tenglamasining ko’rinishi

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{\varphi(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}} = f(x), \qquad x < b,$$

bo’lsa, quyidagi formulani olamiz:

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^\alpha}.$$

KASRLI TARTIBLI INTEGRALNING TA'RIFI VA ENG SODDA XOSSASI

1) $\displaystyle\int_a^x dx\int_a^x dx\ ...\ \int_a^x \varphi(x)dx = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt.$

Buni isbotlash matematik induktsiya yordamida amalga oshiriladi.

$(n-1)! = \Gamma(n)$ ni hisobga olsak, formulani o'ng tomonini n ning butun bo'lmagan qiymatlari uchun ham ma'noga ega bo’lishi mumkinligini ko'ramiz. Shuning uchun butun son bo'lmagan tartibni quyidagicha aniqlash mumkin:

Ta'rif. $\varphi(x) \in L_1(a,b)$ bo'lsin.

$$(I_{a+}^{\alpha}\varphi)x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, \qquad x > a,$$

$$(I_{b-}^{\alpha}\varphi)x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}dt, \qquad x < b,$$

bu yerda $\alpha > 0$, $I_{a+}^{\alpha}\varphi$ va $I_{b-}^{\alpha}\varphi$ integrallar α (kasr son) tartibli integrallar deyiladi.

Ulardan birinchisi ba'zan chap, ikkinchisi - o'ng tomonli integrallar deb ham ataladi. I_{a+}^{α} , I_{b-}^{α} operatorlari kasr tartibli integrallar operator deb ataladi. Ular Riman-Liuvilning kasr tartibli integrallari deb ham ataladi.

Misol sifatida ba’zi funksiyalarning kasr tartibli integrallarini hisoblash yo’llarini ko’rsatamiz.

Izoh. Ayrim misollar [2] maqoladan olingan.

1-misol. $\varphi(t) = c = const$ bo’lsin.

$$I_0^{\alpha}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt =$$

$$= \left| t = xz, dt = xdz, x - t = x - xz = x(1-z) \right| =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{c\,x\,dz}{(x-xz)^{1-\alpha}}dt = \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{x\,dz}{x^{1-\alpha}(1-z)^{1-\alpha}}dt =$$

$$\frac{c}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x x^{\alpha} z^0 (1-z)^{1-\alpha} =$$

$$= \frac{cx^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(1,\alpha) = \left| B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},\ \ \Gamma(2) = 1,\ \ \Gamma(1) = 1 \right|$$

$$= \frac{cx^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(a)\Gamma(1)}{\Gamma(a+1)} = \frac{cx^{\alpha}}{\Gamma(a+1)} + C,$$

bu yerda

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx.$$

2-misol. $\varphi(x) = x^2$ bo’lsin.

$$I_0^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt.$$

Bizning holda

$$\varphi(x) = x^2\,, \qquad \varphi(t) = t^2\,.$$

$$I_0^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt =$$

$$\left| t = xz, dt = xdz, x - t = x - xz == x(1-z) = z(1-z)^{1-\alpha} \right| =$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{t^2}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{x^2 z^2 x\, dz}{(x-xz)^{1-\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{x^3 z^2\, dz}{x^{1-\alpha}(1-z)^{1-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{2+\alpha} \int_0^x z^2 (1-z)^{\alpha-1} dz =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{2+\alpha} B(3,\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{2+\alpha} \frac{\Gamma(3)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(3+\alpha)} = \frac{x^{2+\alpha}}{\Gamma(\alpha+3)} + c;$$

3-misol. $\varphi(x) = x^n$ holni qaraylik.

$$I_0^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt.$$

Bizning holda

$$\varphi(x) = x^n \qquad \varphi(t) = t^n$$

$$\alpha - 1 = n, \Rightarrow \quad \alpha = n + 1.$$

$$I_0^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = \left| \; t = xz, \qquad dt = xdz \right.$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{x^n z^n x\, dz}{x^{1-\alpha}(1-z)^{1-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{x^{n+1} z^n (1-z)^{1-\alpha}\, dz}{x^{1-\alpha}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x x^{n+1} z^n (1-z)^{1-\alpha}\, dz = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{n+1} \int_0^x z^n (1-z)^{1-\alpha}\, dz$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{n+1} B(n+1,\alpha) = \frac{x^{n+1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n+1+\alpha)} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+\alpha)}$$

$$= \frac{x^{n+\alpha}\; n!}{\Gamma(n+1+\alpha)} + C.$$

Yuqorida keltirilgan misollardan ko'rinib turibdiki, 3-misol 2-misolning umulashmasi hisoblanadi.

4-misol. $\varphi(x) = x^{-1}$ bo'lsin.

$$I_0^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt.$$

Bizning holda

$$\varphi(x) = x^{-1} \qquad \varphi(t) = t^{-1}$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{t^{-1}}{(x-t)^{1-\alpha}} dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \quad \left| t = xz, dt = xdz \right| =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{x^{-1} z^{-1} x\, dz}{x^{1-\alpha}(1-z)^{1-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1} \int_0^x z^{-1}(1-z)^{1-\alpha} dz =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1} B(0,\alpha) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(0)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

5-misol. $\varphi(x) = sinx$ funksiyani α $(0 < \alpha < 1) -$ tartibli hosilasini toping.

Ushbu qarayotgan misol [2] da keltirilgan. Misolni yechishni yo'lini va ayrim qismlarini keltiramiz. Buning uchun berilgan funksiyani, y'ani $sinx -$ funksiyani Makloren qatoriga yoyib olamiz.

$$\varphi(x) = sinx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} =$$

$$-x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ \dots + \frac{(-1)^{k+1} x^k}{(2k+1)!} \dots$$

Endi uni kasr tarttibli hosilasini topamiz. Buning uchun qatorni

$$I_0^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt$$

integralga eltib qo'yamiz.

$$\varphi(x) = -t + \frac{t}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^7}{7!} + \frac{t^9}{9!} + \ \dots + \frac{(-1)^{k+1} t^2}{(2k+1)!} + \cdots$$

$$I_0^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(-t + \frac{t}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^7}{7!} + \ \dots + \frac{(-1)^{k+1} t^2}{(2k+1)!} \dots . \right) \frac{dt}{(x - xz)^{1-\alpha}} =$$

$$-\frac{x^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{x^{\alpha+3}}{\Gamma(\alpha+4)3!} - \frac{x^{\alpha+5}}{\Gamma(\alpha+6)5!} + \frac{x^{\alpha+7}}{\Gamma(\alpha+8)7!} - \frac{x^{\alpha+9}}{\Gamma(\alpha+10)9!} + \cdots$$

$$\frac{1}{\Gamma(2k+2+\alpha)(2k+1)!}(-1)^{k+1}x^{2k+\alpha+1}(2k+1)!+\cdots$$

$$\frac{x^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}+\frac{x^{\alpha+3}}{\Gamma(\alpha+4)3!}-\frac{x^{\alpha+5}}{\Gamma(\alpha+6)5!}+\frac{x^{\alpha+7}}{\Gamma(\alpha+8)7!}-\frac{x^{\alpha+9}}{\Gamma(\alpha+10)9!}+\cdots$$

$$\frac{(-1)^{k+1}x^{2k+\alpha+1}}{\Gamma(2k+2+\alpha)}\ldots+C. \qquad (1)$$

Endi sinus va kosinus funksiyalarini $x-a$ argumenti bo‘yicha kasr tartbli integralini hisoblaymiz. $I_{a+}^{\alpha}\,\varphi(x-a)$ operatori $I_0^{\alpha}\varphi(x)$ operatordan ko‘ra umumlashgan operator hisoblanadi. Chunki birinchi operatorning $(x-a)$ argumentidagi a ning o‘rniga ixtiyoriy sonni (xususan, nolni ham) qo‘ysak bo‘ladi.

Yuqorida keltirilgan ta'rifga ko‘ra, $I_{a+}^{\alpha}\,sin(x-a)\,, x>a$ quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$I_{a+}^{\alpha}\,sin(x-a)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x sin(t-a)\,(x-t)^{\alpha-1}dt.$$

$sin(\,t\,-\,a)$ funksiyani a nuqta atrofida Teylor qatoriga yoyamiz (e’tibor qilaylik, $I_0^{\alpha}\varphi(x)$ operatorini $sinx$ funksiyaga qo’llaganimizda uni Makloren qatoriga (xususiy hol) yoygan edik):

$$I_{a+}^{\alpha}\sin(x-a)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\int_a^x(t-a)^{\,2k+1}\,(x-t)^{\alpha-1}dt.$$

Endi [3-8] dagi

$$B(z,w)=\int_0^1 t^{z-1}\,(1-t)^{w-1}dt$$

formulani inobatga olib

$$\int_a^x(t-a)^{\,2k+1}\,(x-t)^{\alpha-1}dt$$

integralni hisoblaymiz. Buning uchun

$$t=\;a+\tau(x-a)$$

ifoda orqali o‘zgaruvchilarni almashtiramiz:

$$I_{a+}^{\alpha} \, sin(x-a) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-a)^{2k+1+\alpha}}{(2k+1)!} \int_0^1 \tau^{\,2k+1} \;(1-\tau)^{\alpha-1} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \;\; (x-a)^{2k+1+\alpha}}{(2k+1)!} B(2k+2,\alpha)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \; (x-a)^{2k+1+a}}{(2k+1)!} \; \frac{\Gamma(2k+2)\Gamma(\alpha)}{\Gamma\,(2k+2+\alpha)} =$$

$$\sum_{k-0}^{\infty} \frac{(-1)^k \; (x-a)^{2k+1+a}}{\Gamma(2k+2+\alpha)} = (x-\alpha)^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-a)^{2k+1}}{\Gamma\,(2k+2+\alpha)}.$$

$\Gamma\,(2k+2+\alpha) -$ Eylerning Gamma funksiyaga Lejandrning

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\mathrm{z})\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$$

ikkilanganlik formulasini qo‘llaymiz:

$$\Gamma\,(2k+2+\alpha) = \frac{2^{2k+1+\alpha}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\,\left(k+1+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{\alpha+3}{2}\right).$$

$\Gamma\left(k+1+\frac{\alpha}{2}\right)$ va $\Gamma\left(k+\frac{\alpha+3}{2}\right) -$ Eylerning bu funksiyalariga umumlashgan pasaytirish formulasini

$$\Gamma(z-n) = \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z-n)(z-n+1)\ldots(z-1)}$$

qo’llaymiz:

$$\Gamma\,\left(k+1+\frac{\alpha}{2}\right) = \left(1+\frac{\alpha}{2}\right)_k \Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\Gamma\,\left(k+\frac{\alpha+3}{2}\right) = \left(\frac{\alpha+3}{2}\right)_k \Gamma\left(\frac{\alpha+3}{2}\right).$$

U holda quyidagiga ega bo’lamiz:

$$I_{a+}^{\alpha} \sin(x-\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}(x-a)^{\alpha+1}}{2^{a+1}\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3+\alpha}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[-\frac{1}{4}(x-a)^2\right]^k}{\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)_k \left(\frac{\alpha+3}{2}\right)_k}.$$

Gaussning gipergeometrik funksiyasini hosil qilish uchun yig’indi ostidagi ifodani $k!$ ga ko’paytirib bo’lamiz:

$$I_{a+}^{\alpha}\sin(x-\alpha)=\frac{\sqrt{\pi}(x-a)^{a+1}}{2^{a+1}\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)}\cdot$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1)_k}{\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)_k\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)_k}\frac{\left[-\frac{1}{4}(x-a)^2\right]^k}{k!}.$$

Lejandrning ikkilanganlik formulasi va

$$_pF_q(\alpha_r\gamma_s;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{r=1}^{p}(\alpha_r)_k}{\prod_{s=1}^{q}(\gamma_s)_k}\frac{z^k}{k!}$$

formulani qo‘llab

$$I_{a+}^{\alpha}\,sin(x-\alpha)=\frac{(x-a)^{a+1}}{\Gamma(a+2)}\quad {}_1F_2\left(1,1+\frac{\alpha}{2},\frac{3+a}{2};-\frac{1}{4}(x-a)^2\right)\qquad(2)$$

ekanligini topamiz.

Xuddi shuningdek, $I_{a+}^{\alpha}\,cos(x-a)\,,x>a$ integralni hisoblaymiz:

$$I_{a+}^{\alpha}\,cos(x-a)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x cos(t-a)\,(x-t)^{\alpha-1}dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\int_a^x(t-a)^{\,2k}\;(x-t)^{\alpha-1}dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\;\;(x-a)^{2k+a}}{(2k)!}\int_0^1 t^{2k}\,(1-t)^{\alpha-1}dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\;(x-\alpha)^{2k+a}}{\Gamma\,(2k+1+\alpha)}=\frac{\sqrt{\pi}(x-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}}\sum_{k-0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,(x-\alpha)^{2k}}{\Gamma\left(k+\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(k+1+\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}(x-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}\,\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)_k\,(x-a)^{2k}}{\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)_k\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)_k}=$$

$$=\frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma\,(\alpha+1)}\quad {}_1F_2\left(1,\frac{1+\alpha}{2},1+\frac{\alpha}{2};-(x-a)^2\right)$$

formulaga ega bo‘lamiz.

Yuqorida keltirilgan hisoblashlar orqali $I_{a+}^{\alpha}\, sin(x-a)$ va $I_0^{\alpha}\, sin\, x$ lar topildi. (1) va (2) formulalarga e'tibor qiladigan bo‘lsak, (2) ga $a=0$ qiymat qo‘yiladigan bo‘lsa, haqiqatan ham (1) formula kelib chiqadi.

Hozirgi zamon texnika asri hisoblanib, uning tez rivojlanishi barcha aniq fanlar oldiga yangidan-yangi katta vazifalar qo’yishni boshladi. Shuning uchun oddiy differentsial tenglamalar, xususiy xosilali differensial tenglamalar sohasini rivojlantirishda e’tiborni kuchaytirishni talab qilmoqda. Bunga asosiy sabab texnik masalalarni hal qilish uchun yangi chegaraviy masalalarni yechish usullarini takomillashtirish va ularning amaliy tadbiqlarini ta’minlash zarur bo’lmoqda.

Differensial tenglamalarga keltiriladigan fizik, mexanik, texnik masalalardan tashqari, ekologiya, biologiya, meditsina, kimyo va boshqa fanlarning ham amaliy masalalarining matematik modellari oddiy va xususiy hosilali differentsial tenglamalarga keltiriladi. Bunda tenglamalar uchun korrekt qo’yilgan chegaraviy masalalarni o’rganish zaruriyati dolzarb hisoblanadi. Yuqoridagi aytilgan masalalar ikkinchi tartibli xususiy hosilali differentsial tenglamalarni, shu jumladan buzilish chizig’iga ega bo’lgan elliptik va giperbolik tipdagi tenlamalarni o’rganish zarurligini namoyon qiladi [3-29]. Bu tenglamalarni o‘rganish jarayonida kasr tartibli integrallar va ularning turli kompozisiyalari keng qo‘llaniladi. Ushbu o‘rganish ishlarida qulaylik tug‘dirish uchun bir qator ilg‘or pedagogik texnologiyalarga asoslangan [30-35] ilmiy izlanishlar olib borilgan.

O‘rganilayotgan mavzuni boshqa fanlar bilan integratsiyasi haqida qisqacha ma'lumot keltiramiz. Tabiatda populyasiyaning turli xil tiplari uchraydi: yopiq; panmiktik; mendelcha va muvozanatlangan populyasiya. Fanda mavjud bo‘lgan ideal populyasiya tushunchasi tabiatda uchramaydi va u faqat matematik modellarda hisobga olinadi. Chunki matematik modellarni qurishda barcha parametrlarni hisobga olish o‘ta murakkab masalalarga olib keladi va uni o‘rganish ishlari ham bir qator qiyinchiliklar tug‘diradi. Masalan, baliqlar populyasiyani o‘rganish jarayonida ularning aralashib ketishiga geografik (suv havzasi, tog‘, o‘rmon, cho‘l), biologik (jinsiy apparatning tuzilishida kuyikish va uya qurish), ekologik omillar ta'sir ko‘rsatishini inobatga olish katta qiyinchiliklar tug‘diradi. Bularning barchasi bu populyasiyaning matematik modelini qurish uchun muammoli masaladir. Shuning uchun, matematik modellarni tuzishda bir qancha parametrlarni inobatga olishda va ularni hisoblashda turli farazlar (shuningdek, ideallashtirishlar) kiritiladi.

Matematik modellar oddiy differensial tenglamalar sistemalari va tengsizliklar yig‘indisidan iborat bo‘lib, ularning yechimlari yordamida u yoki bu omilning ta'sir kuchi o‘zgarishini oldindan aytib berish mumkin. Masalan populyasiya jarayoni oddiy differensial tenglamalar sistemalari orqali ifodalangan bo‘lsa, bu kabi tenglamalarni sifatiy tahlil qilish orqali kerakli natijalarni olish mumkin. Shu va shunga o‘xshash oddiy va xususiy hosilali differensial tenglamalarning biologik jarayonlarni ifodalashi [36-48] adabiyotlarda bayon qilingan.

Bundan tashqari, kasr tartibli integrallar tushunchasi va ularni umumlashtirish zarurati termodinamik jarayonlarni o‘rganishda yuzaga keladi. Masalan, 1/2-tartibli differensial tenglamalar haroratning o‘zgarishi iqlim tizimlarini nazorat qilish inshootlari, diffuziya jarayonlari superkondensatorlarni zaryad qilish kabi ba'zi jismoniy jarayonlarni tasvirlaydi.

Shuning uchun kasr tartibli hosilalarning talqinlari (aniqrog‘i kasr tartibli hosilalari bilan differensial tenglamalar) ob'ekt bo‘lgan diffuziya jarayonlarining tavsiflarida ko‘rsatiladi hamda modellashtirish asosan taqsimlangan deb hisoblanadi. Bu tenglamalarni yechishda asosiy rolni kasr tartibli integrallar o‘ynaydi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, «Наука и техника», 1987 г., 688 с.

2. Шукурова М.Ф., Раупова М.Х. Каср тартибли интегралларни ҳисоблашга доир методик тавсиялар // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), 65-76 b.

3. Расулов Х.Р. Краевые задачи для квазилинейных уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения // Бухара, «Дурдона», 2020 г., 96 с.

4. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Задача типа задач Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Scientific progress, 2:1 (2021), p.42-48.
5. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. (2022) Ikkita buzilish chizig'iga ega kvazichiziqli elliptic tenglama uchun chegaraviy masala haqida // Central Asian Academic Journal Of Scientific Research, 2(5), 544-557 b.
6. Мирсабуров М. Нелокальная краевая задача для вырождающегося эллиптического уравнения, Дифференциальные уравнения, 38:1 (2002), 129–131.
7. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, с. 197-199.
8. Rasulov Kh.R., Sobirov S.Zh. A problem of the Gellerstedt type for one mixed-type equation with two lines of degeneration // Scientific progress, 2:1 (2021), p. 42-48.
9. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.
10. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.
11. Rasulov H. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10 (2019), p.35-38.
12. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. Организация практического занятия на основе инновационных технологий на уроках математики // Наука, техника и образование, 72:8 (2020) с.29-32.
13. Rasulov X.R. Sayfullayeva Sh.Sh. Buzilish chizig'iga ega bo'lgan elliptik tipdagi tenglamalar uchun qo'yiladigan chegaraviy masalalar haqida // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), p.46-54.
14. Расулов Х.Р. Об одной краевой задаче со смещением для линейного уравнения гиперболического типа // Академик Тошмухаммад Ниёзович Кори-

Ниёзийнинг хаёти ва ижоди, чет эл олимлари иштирокида илмий-амалий конференция тезислари тўплами, Тошкент, 2017, 84-85 б.
15. Салохитдинов М.С., Расулов Х.Р. (1996). Задача Коши для одного квазилинейного вырождающегося уравнения гиперболического типа // ДАН Республики Узбекистан, №4, с.3-7.
16. Расулов Х.Р. Об одной краевой задаче для уравнения гиперболического типа // «Комплексный анализ, математическая Физика и нелинейные уравнения» Международная научная конференция Сборник тезисов Башкортостан РФ (оз. Банное, 18 – 22 марта 2019 г.), с.65-66.
17. Rasulov X.R. (2020). Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration // Uzbek Mathematical Journal, №3, pp.117-125.
18. Расулов Х.Р. (1996). Задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №12, с.12-16.
19. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Ikkita buzilish chizig'iga ega elliptik tenglama uchun chegaraviy masalaning yechimi haqida // Models and methods for increasing the efficiency of innovative research, Germany, 10 (2022), p. 184-186.
20. Rasulov Kh.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Analysis of Some Boundary Value Problems for Mixed-Type Equations with Two Lines of Degeneracy // Irish Interdisciplinary Journal of Science & Research (IIJSR), 6:2 (2022), p. 8-14.
21. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Ikkita buzilish chizig’iga ega giperbolik tipdagi tenglama uchun Koshi masalasi haqida // «Zamonaviy ta’lim tizimini rivojlantirish va unga qaratilgan kreativ g’oyalar, takliflar va yechimlar», 35-sonli Respublika ilmiy-amaliy on-line konferensiyasi, 2022, 192-195 b.
22. Расулов Х.Р. Бузилиш чизиғига эга бўлган квазичизиқли аралаш типдаги тенглама учун Трикоми масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида // Аниқ фанларни касбга йуналтириб ўқитиш муаммолари ва ечимлари, Республика илмий-амалий конференция материаллари тўплами, 2018, Навоий, 14-15 б.

23. Rasulov Kh.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.
24. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. О существовании обобщенного решения краевой задачи для нелинейного уравнения смешанного типа // Вестник науки и образования, 97:19-1 (2020), С. 6-9.
25. Rasulov H. Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration // Центр научных публикаций (buxdu. uz) 5:5 (2021).
26. Rasulov X.R. Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation of a mixed type // Modern problems of applied mathematics and information technologies Al-Khwarizmi 2021, Fergana, Uzbekistan, p. 149.
27. Исломов Б., Расулов Х.Р. (1997). Существование обобщенных решений краевой задачи для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №7, с.5-9.
28. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.
29. Расулов Х.Р. и др. О разрешимости задачи Коши для вырождающегося квазилинейного уравнения гиперболического типа // Ученый XXI века. 53:6-1, 2019. С.16-18.
30. Расулов Т.Ҳ., Расулов Х.Р. (2021). Ўзгариши чегараланган функциялар бўлимини ўқитишга доир методик тавсиялар. Scientific progress. 2:1, 559-567 бетлар.
31. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Модуль қатнашган баъзи тенглама, тенгсизлик ва тенгламалар системаларини ечиш йўллари // Science and Education, scientific journal, 2:9 (2021), p.7-20.
32. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Айрим рационал тенгламаларни ечишда интерфаол усулларни қўлланилиши ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p. 586-595.

33. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Айрим иррационал тенгламаларни ечишда интерфаол усулларни қўлланилиши // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.596-607.
34. Rasulov, H. (2021). Funksional tenglamalarni yechish bo‘yicha ba’zi uslubiy ko‘rsatmalar. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
35. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики, № 53:2 (2021), с. 7-10.
36. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // Scientific progress, 2:2 (2021), p.870-879.
37. Rasulov, H. (2021). «Kompleks analiz» fanida mustaqil ta’limni tashkil qilish. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
38. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяция ва унинг математик модели ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.81-96.
39. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Об одном квадратично стохастическом операторе с непрерывным временем // «The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference, Tashkent, mart 2021 y., p.145-146.
40. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяциянинг динамикаси ҳақида // Scientific progress, 2:1 (2021), p.665-672.
41. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об анализе некоторых невольтерровских динамических систем с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с.27-30.
42. Rasulov X.R., Qamariddinova Sh.R. Ayrim dinamik sistemalarning tahlili haqida // Scientific progress, 2:1 (2021), p.448-454.
43. Расулов Х.Р., Джуракулова Ф.М. Об одной динамической системе с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с. 19-22.
44. Х.Р Расулов, Ф.М. Джуракулова (2021). Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида // Scientific progress. 2:1, 455-462 бетлар.

45. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. О некоторых вольтерровских квадратичных стохастических операторах двуполой популяции с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с.23-26.
46. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об одной динамической системе с непрерывным временем // «The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference, Tashkent, mart 2021 y., p.115-116.
47. Rasulov, R. X. R. (2021). Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation of a mixed type. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
48. Rasulov, X. (2022). Об одном краевом задаче для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).