№ 2(32) 2021

ISSN 2181-8460

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

MUHAMMAD AL-XORAZMIY NOMIDAGI
TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI
UNIVERSITETI

AXBOROT-KOMMUNIKATSIYA
TEXNOLOGIYALARI
ILMIY-INNOVATSION MARKAZI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 2(32) 2021

Журнал основан в 2015 году.
Издается 6 раз в год.

Учредитель:
Научно–инновационный центр информационно-коммуникационных технологий.

Журнал зарегистрирован в Узбекском Агентстве по печати и информации.
Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Адрес редакции:
100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.
Тел.: +(99871) 231-92-45.
E-mail: info@pvpm.uz.
Сайт: www.pvpm.uz.

Дизайн и компьютерная вёрстка:
Шарипов Х. Д.

Отпечатано в типографии НИЦ ИКТ.
Подписано в печать 23.04.2021 г.
Формат 60x84 1/8. Заказ №4.
Тираж 100 экз.

Содержание

УДК 004.94:519.637

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ЭФФЕКТИВНЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛО-ВЛАГОПЕРЕНОСА В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Шадманов И.У.

i.shadmanov@mathinst.uz

Бухарское отделение Института математики имени В.И.Романовского АН РУз, 200114, Узбекистан, Бухара, улица Мухаммад Икбол 11.

В статье рассматривается многомерная математическая модель и численный алгоритм процесса тепловлагопереноса, учитываюший такие факторы, как собственное тепловлаговыделение натурального продукта, влияние изменений температуры и влаги окружающей среды, при хранении и сушке пористых материалов. Разработанный модель и численный алгоритм позволяют прогнозировать изменение температуры и влаги в произвольных точках пористой теле, а также служат для предотвращения потери качества и самовозгорания материалах, находящихся под солнечной радиацией. На основе метода покоординатного расщепления представлен численный алгоритм расчета трехмерных задач тепловлагопереноса в областях типа параллелепипеда. Представлена неявная разностная схема второго порядка для вычисления искомых функций.

Ключевые слова: математическая модель, теплоперенос, влагоперенос, внутренная тепловлаговыделения, расщепления по координатам, пористое среда.

Цитирование: *Шадманов И.У.* Математическая модель и эффективный численный алгоритм для исследования процессов тепло-влагопереноса в пористых средах // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2021. – № 2(32). – С. 117-134.

1 Введение

В основе современной теории сушки лежат законы перемещения влаги и тепла в сушимом материале. Влага перемещается как при перепаде влажности, так и при перепаде температур в пористом теле. Наиболее эффективное перемещение влаги и тепла в коллоидных капиллярно-пористых телах, к числу которых относятся сельскохозяйственных продукты, обусловлено правильным сочетанием температур нагрева с влажностью материала. Это условие - решающее для сохранения жизнеспособности семян и качества сельскохозяйственных продуктов (зерна, семян масличных культур, хлопка-сырца, овощей и др.).

В формирование и развитие теории тепло- и массопереноса большой вклад внесли А.Н.Тихонов, А.А.Самарский, А.В.Лыков, Ю.А.Михайлов, Б.М.Будак, D.Anderson, J.Tannekhil, А.И.Леонтьев, Б.Н.Юдаев, и др. Основные положения сушильного процесса коллоидных капиллярно-пористых телах разработаны учёными А. В. Лыков, В.М. Пасканов, В.П. Исаченко, В.А. Осиповой, А.С. Сукомел, П. С. Коссович, А. В. Лебедев, В. Г. Горячкин, М. В. Кирпичев и др.

В частности, в статье [1] рассматривается математическая модель нестационарных процессов взаимосвязанного тепломассопереноса в капиллярно-пористых средах с учетом влияния капиллярных и поверхностных сил, интенсивности массообмена между фазами и термокапиллярных течений. На основе метода взвешенных невязок разработан численный метод решения уравнений тепловлагопереноса в капиллярно-пористых средах. Проведена экспериментальная верификации предложенной математической модели тепловлагопереноса.

В статье [2] исследовано распределения температуры и влажности в сферическом образце пористого глинистого материала в процессах сушки и охлаждения. Был проведен эксперимент по нагреву образца для различных температур сушильной камеры. Температурные зависимости демонстрируют появление четырех периодов нагрева. Результаты, полученные при моделировании процесса нагрева, хорошо согласуются с экспериментальными данными. Установлено, что с увеличением температуры наружного воздуха время жизни каждого периода нагрева уменьшается. Это уменьшение может быть аппроксимировано степенной зависимостью. Смоделирован процесс нагрева глиняных сфер разных радиусов. Было определено, что с учетом изменений влагосодержания температурные зависимости качественно отличаются друг от друга и не существует коэффициента нормализации, который сводил бы результаты к одной кривой.

В статье [3] исследовано процесс нагрева и сушки пористых материалов в условиях воздействия постоянной температуры. Рассмотрено влияние температуры среды на скорость нагрева изделий из растительного полимера. Разработана методика определения влажности продукта и скорости его сушки. Получены зависимости влажности продукта от времени нагревания его в сушилке и скорости сушки от влажности изделий, изготовленных из полимерного материала.

В статье [4] решена задача тепломассопереноса в древесине под воздействием кондуктивного нагрева. Массовая скорость испарения заранее задавалась через давление насыщенных паров в экспоненциальной форме. Конвективный перенос учитывали через уравнения неразрывности пара, Менделева-Клапейрона и линейного закона Дарси.

В статье [5] проведенно математическая модель описывающийся переходного тепло-, воздухо- и влагообмена. Основные дифференциальные уравнения в частных производных одновременно решаются для температуры и капиллярного давления через многослойную пористую среду, включая нелинейные свойства материалов для передачи и хранения. Модель учитывает нелинейные свойства переноса и хранения материалов, перенос влаги за счет диффузии пара, капиллярный перенос жидкости и воды, а также конвективный перенос тепла и влаги через многослойную пористую среду. Решающая программа COMSOL-Multiphysics была выбрана для решения основных уравнений переноса тепло-, воздухо- и влагообмена.

Расширенная система потенциалопроводности за счет уравнения относительно статического давления, опирающаяся на силы поверхностного натяжения жидкости и законы капиллярности, приведена в книге А.В. Лыкова и Ю.А. Михайлова [6].

Лыковым А.В. установлено, что при интенсивном нагреве капиллярно пористого тела кинетика сушки может зависеть не только от градиента потенциала переноса влаги, но и от градиента температуры и градиента внутреннего давления [7].

В частности, статье [8] для описания процесса сушки в капиллярно-пористом теле была применена система Лыкова дифференциальных уравнений в частных производных для переноса тепла, массы и давления. Двумерная модель конечных элементов была сформулирована для решения системы уравнений. Результаты моделирования очень хорошо согласуются с точными решениями. Затем модель конечных элементов использовалась для изучения чувствительности параметров в системе передачи тепла, массы и давления Лыкова, а также для оценки ключевых параметров, определяющих коэффициент проводимости влаги и отношение диффузии пара к общей диффузии. Модель конечных элементов в дальнейшем использовалась для прогнозирования изменений температуры, влажности и давления во время сушки.

В работе [9] разработана численная схема для совместного решения уравнений распространения тепла и влаги уравнений А.В. Лыкова и Максвелла. Она строится на основе двух алгоритмов: при заданном распределении диэлектрической проницаемости решается задача о расчете поля плотности электромагнитных потерь, коэффициентов отражения и пропускания; при заданном поле плотности электромагнитных потерь решается задача о расчете полей температуры и влагосодержания. Проведена численный эксперимент, результаты которого находятся в хорошем согласии с имеющимися в литературе опытными данными.

В статье [10] для решений системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных А.В. Лыкова, направленных на наиболее общий тип граничных условий, используется подход анализа собственных значений. Решения для безразмерного распределения температуры и влаги, полученные с помощью матричного исчисления, образуют достаточно общие выражения, из которых в качестве частного случая могут быть получены решения многих конкретных одномерных, зависящих от времени задач тепломассопереноса. Рассмотрен конкретный пример контактной сушки влажного пористого листа с равномерной начальной температурой и распределением влаги.

В работе [11] предложена обобщенная математическая модель тепловых и влажностных процессов при термической обработке древесины. Математическая модель основана на наборе связанных уравнений тепломассопереноса, предложенном А.В. Лыковым. Профили среднего содержания влаги и температуры были предсказаны как функция времени и определяющих параметров. Показано, что определяющие безразмерные параметры оказывают существенное влияние на кинетику переноса тепла и влаги. Результаты, полученные в рамках рассматриваемой модели, демонстрируют реалистичное физическое поведение.

В статье [12] разработана математическая модель теплового состояния пористого тела, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда. В модели учтены внутреннее тепловыделение, теплообмен через поверхности пористого тела с окружающей средой. Для решения задачи разработана модификация дифференциально-разностного основаны на методе прямых.

Математическое моделирование процессов сушки различных продуктов, таких как хлопок-сырец, фрукты, зерна, древесина и другие, осуществлено в работах [13–17].

2 Постановка задачи

Учитывая основных показателей процесса сушки и хранения пористых тел, математической модели тепловлагопереноса предложено следующая система дифференциальных уравнений [18, 19]:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a_{11}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + a_{12}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f\,; \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a_{21}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + a_{22}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + q\,; \tag{2}$$

соответственно с начальными и краевыми условиями:

$$T\left(x,y,z,0\right)=T_0\left(x,y,z\right),u\left(x,y,z,0\right)=u_0\left(x,y,z\right); \tag{3}$$

$$\lambda_1 \tfrac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0}=-\beta_1\left(T_{oc}-T\right)-\eta\rho\gamma R\left(\tau\right); \tag{4}$$

$$\lambda_1 \tfrac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=L_x}=-\beta_1\left(T_{oc}-T\right)-\eta\rho\gamma R\left(\tau\right); \tag{5}$$

$$\lambda_1 \tfrac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0}=-\beta_1\left(T_{oc}-T\right)-\eta\rho\gamma R\left(\tau\right); \tag{6}$$

$$\lambda_1 \tfrac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=L_y}=-\beta_1\left(T_{oc}-T\right)-\eta\rho\gamma R\left(\tau\right); \tag{7}$$

$$\tfrac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z=0}=0; \tag{8}$$

$$\lambda_1 \tfrac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z=L_z}=-\beta_1\left(T_{oc}-T\right)-\eta\rho\gamma R\left(\tau\right); \tag{9}$$

$$\lambda_2 \tfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=-\beta_2\left(u_{oc}-u\left(0,y,z,\tau\right)\right); \tag{10}$$

$$\lambda_2 \tfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=L_x}=-\beta_2\left(u_{oc}-u\left(L_x,y,z,\tau\right)\right); \tag{11}$$

$$\lambda_2 \tfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=-\beta_2\left(u_{oc}-u\left(x,0,z,\tau\right)\right); \tag{12}$$

$$\lambda_2 \tfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=L_y}=-\beta_2\left(u_{oc}-u\left(x,L_y,z,\tau\right)\right); \tag{13}$$

$$\tfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0}=0; \tag{14}$$

$$\lambda_2 \tfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=L_z}=-\beta_2\left(u_{oc}-u\left(x,y,L_z,\tau\right)\right). \tag{15}$$

Здесь T и u –соответственное температуры и влаги пористого тела; $a_{11}=\frac{\lambda_1}{\rho c_1}$; $a_{12}=\frac{\lambda_2}{\rho c_2}$ - соответственно коэффициенты температуропроводности и влагопроводности пористых тел; λ_1, λ_2- коэффициенты теплопроводности и влагопроводности; ρ - плотность тела; $_1$, $_2$ - удельных теплоемкости и влагоемкости; $f\left(x,y,z,\tau\right)=b\cdot e^{-\alpha\tau}$ – интенсивность внутреннего тепловыделения массы; $b=\frac{u}{c_1}$ - коэффициент тепловыделения, который зависит от влажность пористых телах, $b=f\left(u\left(x,y,z,t\right)\right)$; α - эмпирический параметр; $q\left(x,y,z,\tau\right)=\rho m_0 e^{-\xi\tau}$– интенсивность внутренних источников влаги; при постоянных значениях плотности материала ρ; ξ - коэффициент сушки; m_0 - максимальная интенсивность испарения. Надо отметить, что интенсивность испарения вычисляется с помощью $m=m_0 e^{\xi\tau}$. Если положить $\xi=0$ то $m=m_0=$ $=const$, получим постоянную интенсивность испарения, соответствующую первому периоду сушки; β_1 - коэффициент теплоотдачи между массой и окружающим его воздухом; T_{oc}– температура окружающей среды;η ,- коэффициенты для проведения граничного условия к размерному виду; γ- коэффициент поглощения солнечных лучей материалом; $R\left(\tau\right)$ - инсоляция поток солнечной радиации на поверхности хранимого материала; β_2 - коэффициент влагоотдачи между массой и окружающим его воздухом; u_{oc} – влажность окружающей среды.

Внешняя форма пористого тела взято как прямоугольный параллелепипед. Параллелепипед расположен в первом октанте декартовой системы координат, и размеры его по координатам составляют L_x, L_y, L_z.

3 Метод решения

Так как, поставленная задача (1) - (15) описывается многомерным дифференциальным уравнением в частных производных с соответствующими начальными и краевыми условиями, то найти ее точное решение в аналитической форме практически невозможно.

Учитывая вышеуказанных обстоятельств, для решения задачи используем метод расщепления по координатам на каждом временном слое.

Метод расщепления по физическим процессам базируется на аппроксимации высоко порядка [20], обосновании аддитивность процессов для достаточно малых шагов по времени [21] и доказательстве суммарной аппроксимацией исходного уравнения вследствие расщепления. Общая теория расщепления полно изложено в [22, 23], а особенности расщепления для задачи конвекции в прямоугольных областях и параллелепипедах в [24–26].

В рамках теории метода покоординатного расщепления метод решения задачи (1)–(15) может быть представлен в виде трех последовательных подзадач.

Задача А:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a_{11}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{3}f; \tag{16}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a_{21}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{22}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{3}q; \tag{17}$$

с начальными:

$$T_1^0 = T_3^{n+1}, u_1^0 = u_3^{n+1}\tau = \tau_n; \tag{18}$$

и граничными условиями:

$$\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} = -\beta_1\left(T_{oc} - T_1\right) - \eta\rho\gamma R\left(\tau\right); \tag{19}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=L_x} = -\beta_1\left(T_{oc} - T_1\right) - \eta\rho\gamma R\left(\tau\right); \tag{20}$$

$$\lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = -\beta_2\left(u_{oc} - u_1\right); \tag{21}$$

$$\lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=L_x} = -\beta_2\left(u_{oc} - u_1\right). \tag{22}$$

Задача Б:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a_{11}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{3}f; \tag{23}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a_{21}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_{22}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{3}q; \tag{24}$$

с начальными:

$$T_2^0 = T_1^{n+1}, u_2^0 = u_1^{n+1}; \tag{25}$$

и граничными условиями:

$$\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0} = -\beta_1 \left(T_{oc} - T_2\right) - \eta\rho\gamma R\left(\tau\right); \tag{26}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=L_y} = -\beta_1 \left(T_{oc} - T_2\right) - \eta\rho\gamma R\left(\tau\right); \tag{27}$$

$$\lambda_2 \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = -\beta_2 \left(u_{oc} - u_2\right); \tag{28}$$

$$\lambda_2 \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=L_y} = -\beta_2 \left(u_{oc} - u_2\right). \tag{29}$$

Задача B:

$$\tfrac{\partial T}{\partial \tau} = a_{11} \tfrac{\partial^2 T}{\partial z^2} + a_{12} \tfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \tfrac{1}{3} f; \tag{30}$$

$$\tfrac{\partial u}{\partial \tau} = a_{21} \tfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + a_{22} \tfrac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \tfrac{1}{3} q; \tag{31}$$

с начальными:

$$T_3^0 = T_2^{n+1}, u_3^0 = u_2^{n+1}; \tag{32}$$

и граничными условиями:

$$\lambda_1 \tfrac{\partial T}{\partial z}\big|_{z=0} = 0; \tag{33}$$

$$\lambda_1 \tfrac{\partial T}{\partial z}\big|_{z=L_z} = -\beta_1 \left(T_{oc} - T_3\right) - \eta\rho\gamma R\left(\tau\right); \tag{34}$$

$$\lambda_2 \tfrac{\partial u}{\partial z}\big|_{z=0} = 0; \tag{35}$$

$$\lambda_2 \tfrac{\partial u}{\partial z}\big|_{z=L_z} = -\beta_2 \left(u_{oc} - u_3\right). \tag{36}$$

Рассмотренный выше вариант схемы осуществляет последовательное покоординатное расщепление задачи, начиная с направления $\overrightarrow{Ox}$, далее $\overrightarrow{Oy}$ и, наконец, $\overrightarrow{Oz}$ в пределах каждого временного интервала $\tau_n \leqslant \tau \leqslant \tau_{n+1}$.

Таким образом, после расщепления исходной задачи по координатам получили три подзадачи (16) - (22), (23) - (29) и (30) – (36), которые будем решать используя неявную конечно-разностную схему по времени и со вторым порядком точности по координатам, заменяя непрерывную область изменения искомых переменных на сеточную с шагом Δx; Δy; Δz:

$$\Omega_{xyzt} = \left\{ \left(x_i = i\Delta x,\ y_j = j\Delta y,\ z_k = k\Delta z,\ \ \tau_n = n\ \Delta t \right) \right\};$$

где

$$i = \overline{1, N_x};\ \ j = \overline{1, M_y},\ \ k = \overline{1, L_z},\ n = \overline{0, N_t},\ \ \ \Delta t = \frac{1}{N_t}.$$

Тогда, для задачи A, уравнение (16) аппроксимируем по x:

$$\tfrac{1}{2} \tfrac{T_{1,i}^{n+\frac{1}{3}} - T_{1,i}^{n}}{\Delta\tau/3} + \tfrac{1}{2} \tfrac{T_{1,i+1}^{n+\frac{1}{3}} - T_{1,i+1}^{n}}{\Delta\tau/3} = a_{11} \tfrac{T_{1,i+1}^{n+\frac{1}{3}} - 2T_{1,i}^{n+\frac{1}{3}} + T_{1,i-1}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta x^2} + a_{12} \tfrac{u_{1,i+1}^{n} - 2u_{1,i}^{n} + u_{1,i-1}^{n}}{\Delta x^2} + \tfrac{1}{3} f_i^{n+\frac{1}{3}}; \tag{37}$$

и группируя схожих членов в уравнение (37) получим:

$$\frac{a_{11}}{\Delta x^2}T_{1,i-1}^{n+\frac{1}{3}} - \left(\frac{3}{2\Delta\tau} + \frac{2a_{11}}{\Delta x^2}\right)T_{1,i}^{n+\frac{1}{3}} + \left(-\frac{3}{2\Delta\tau} + \frac{a_{11}}{\Delta x^2}\right)T_{1,i+1}^{n+\frac{1}{3}} = -\frac{3}{2\Delta\tau}T_{1,i}^{n} -$$

$$-\frac{3}{2\Delta\tau}T_{1,i+1}^{n} - a_{12}\frac{u_{1,i+1}^{n} - 2u_{1,i}^{n} + u_{1,i-1}^{n}}{\Delta x^2} - \frac{1}{3}f_i^{n+\frac{1}{3}}$$

Введем обозначения:

$$a_{1,i} = \frac{a_{11}}{\Delta x^2}, \qquad b_{1,i} = \frac{3}{2\Delta\tau} + \frac{2a_{11}}{\Delta x^2}, \quad c_{1,i} = -\frac{3}{2\Delta\tau} + \frac{a_{11}}{\Delta x^2},$$

$$d_{1,i} = \frac{3}{2\Delta\tau}T_{1,i}^{n} + \frac{3}{2\Delta\tau}T_{1,i+1}^{n} + a_{12}\frac{u_{1,i+1}^{n} - 2u_{1,i}^{n} + u_{1,i-1}^{n}}{\Delta x^2} + \frac{1}{3}f_i^{n+\frac{1}{3}},$$

и получим систему трех диагональных алгебраических уравнений:

$$a_{1,i}T_{1,i-1}^{n+\frac{1}{3}} - b_{1,i}T_{1,i}^{n+\frac{1}{3}} + c_{1,i}T_{1,i+1}^{n+\frac{1}{3}} = -d_{1,i}. \tag{38}$$

Теперь, граничную условию (19) аппроксимируем по x и при $i = 1$ получим:

$$\lambda_1\frac{-3T_{1,0}^{n+\frac{1}{3}} + 4T_{1,1}^{n+\frac{1}{3}} - T_{1,2}^{n+\frac{1}{3}}}{2\Delta x} = -\beta_1 T_{oc} + \beta_1 T_{1,0}^{n+\frac{1}{3}} - \varphi_i^n,$$

или

$$T_{1,2}^{n+\frac{1}{3}} = -3T_{1,0}^{n+\frac{1}{3}} + 4T_{1,1}^{n+\frac{1}{3}} + \tfrac{2\Delta x}{\lambda_1}\beta_1 T_{oc} - \tfrac{2\Delta x}{\lambda_1}\beta_1 T_{1,0}^{n+\frac{1}{3}} + \tfrac{2\Delta x}{\lambda_1}\varphi_i^n; \tag{39}$$

где $\varphi_i^n = \eta\rho\gamma R(\tau)$.

Из системы уравнении (38) при $i = 1$, получим:

$$a_{1,1}T_{1,0}^{n+\frac{1}{3}} - b_{1,1}T_{1,1}^{n+\frac{1}{3}} + c_{1,1}T_{1,2}^{n+\frac{1}{3}} = -d_{1,1}. \tag{40}$$

Поставив $T_{1,2}^{n+\frac{1}{3}}$ из (40) в (39) найдем $T_{1,0}^{n+\frac{1}{3}}$:

$$T_{1,0}^{n+\frac{1}{3}} = \tfrac{\lambda_1 b_{1,1} - 4\lambda_1 c_{1,1}}{a_{1,1}\lambda_1 - 3c_{1,1}\lambda_1 - 2\Delta x c_{1,1}\beta_1}T_{1,1}^{n+\frac{1}{3}} + \tfrac{-d_{1,1}\lambda_1 - 2\Delta x c_{1,1}\beta_1 T_{oc} - 2\Delta x c_{1,1}\varphi_i^n}{a_{1,1}\lambda_1 - 3c_{1,1}\lambda_1 - 2\Delta x c_{1,1}\beta_1}; \tag{41}$$

Вводя обозначение вместе (41) получим:

$$T_{1,0}^{n+\frac{1}{3}} = \alpha_{1,0}T_{1,1}^{n+\frac{1}{3}} + \beta_{1,0}; \tag{42}$$

Из соотношение (42) следуют, что прогоночные коэффициенты $\alpha_{1,0}$ и $\beta_{1,0}$ вычисляется с помощью:

$$\alpha_{1,0} = \frac{\lambda_1 b_{1,1} - 4\lambda_1 c_{1,1}}{a_{1,1}\lambda_1 - 3c_{1,1}\lambda_1 - 2\Delta x c_{1,1}\beta_1}, \quad \beta_{1,0} = \frac{-d_{1,1}\lambda_1 - 2\Delta x c_{1,1}\beta_1 T_{oc} - 2\Delta x c_{1,1}\varphi_i^n}{a_{1,1}\lambda_1 - 3c_{1,1}\lambda_1 - 2\Delta x c_{1,1}\beta_1}.$$

Аналогично аппроксимируя граничную условию (20) по x и при $i = N$ получим:

$$\lambda_1\frac{T_{1,N-2}^{n+\frac{1}{3}} - 4T_{1,N-1}^{n+\frac{1}{3}} + 3T_{1,N}^{n+\frac{1}{3}}}{2\Delta x} = -\beta_1 T_{oc} + \beta_1 T_{1,N}^{n+\frac{1}{3}} - \varphi_i^n,$$

или

$$(3\lambda_1 - 2\Delta x\beta_1)\, T_{1,N}^{n+\frac{1}{3}} = -\lambda_1 T_{1,N-2}^{n+\frac{1}{3}} + 4\lambda_1 T_{1,N-1}^{n+\frac{1}{3}} - 2\Delta x\beta_1 T_{oc} - 2\Delta x\varphi_i^n; \tag{43}$$

где $\varphi_i^n = \eta\rho\gamma R\,(\tau)$.

Применяя метод обратной прогонки для последовательности *N, N-1* и *N-2* найдем $T_{1,N-1}^{n+\frac{1}{3}}$ и $T_{1,N-2}^{n+\frac{1}{3}}$:

$$T_{1,N-1}^{n+\frac{1}{3}} = \alpha_{1,N-1} T_{1,N}^{n+\frac{1}{3}} + \beta_{1,N-1}; \tag{44}$$

$$T_{1,N-2}^{n+\frac{1}{3}} = \alpha_{1,N-2}\alpha_{1,N-1} T_{1,N}^{n+\frac{1}{3}} + \alpha_{1,N-2}\beta_{1,N-1} + \beta_{1,N-2}. \tag{45}$$

Поставив $T_{1,N-1}^{n+\frac{1}{3}}$ из (44) и $T_{1,N-2}^{n+\frac{1}{3}}$ из (45) в (43) найдем $T_{1,N}^{n+\frac{1}{3}}$:

$$T_{1,N}^{n+\frac{1}{3}} = \frac{-\lambda_1\alpha_{1,N-2}\beta_{1,N-1} - \lambda_1\beta_{1,N-2} + 4\lambda_1\beta_{1,N-1} - 2\Delta x\beta_1 T_{oc} - 2\Delta x\varphi_i^n}{3\lambda_1 - 2\Delta x\beta_1 + \lambda_1\alpha_{1,N-2}\alpha_{1,N-1} - 4\lambda_1\alpha_{1,N-1}}. \tag{46}$$

Значения последовательности температуры $T_{1,N-1}^{n+\frac{1}{3}}$, $T_{1,N-2}^{n+\frac{1}{3}}, ..., T_{1,1}^{n+\frac{1}{3}}$, определяется методом обратной прогонки по уменьшению i последовательности:

$$T_{1,i}^{n+\frac{1}{3}} = \alpha_{1,i} T_{1,i+1}^{n+\frac{1}{3}} + \beta_{1,i}, \quad i = \overline{N-1,\,1}. \tag{47}$$

Далее, уравнение (17) аппроксимируем по x:

$$\frac{1}{2}\frac{u_{1,i}^{n+\frac{1}{3}} - u_{1,i}^n}{\Delta\tau/3} + \frac{1}{2}\frac{u_{1,i+1}^{n+\frac{1}{3}} - u_{1,i+1}^n}{\Delta\tau/3} = a_{21}\frac{u_{1,i+1}^{n+\frac{1}{3}} - 2u_{1,i}^{n+\frac{1}{3}} + u_{1,i-1}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta x^2} + a_{22}\frac{T_{1,i+1}^n - 2T_{1,i}^n + T_{1,i-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{1}{3}q_i^{n+\frac{1}{3}}; \tag{48}$$

и группируя схожих членов в уравнение (48) получим:

$$\frac{a_{21}}{\Delta x^2}u_{1,i-1}^{n+\frac{1}{3}} - \left(\frac{3}{2\Delta\tau} + \frac{2a_{21}}{\Delta x^2}\right)u_{1,i}^{n+\frac{1}{3}} + \left(-\frac{3}{2\Delta\tau} + \frac{a_{21}}{\Delta x^2}\right)u_{1,i+1}^{n+\frac{1}{3}} = -\frac{3}{2\Delta\tau}u_{1,i}^n -$$

$$-\frac{3}{2\Delta\tau}u_{1,i+1}^n - a_{22}\frac{T_{1,i+1}^n - 2T_{1,i}^n + T_{1,i-1}^n}{\Delta x^2} - \frac{1}{3}q_i^{n+\frac{1}{3}}.$$

Введем обозначения:

$$\widehat{a}_{1,i} = \frac{a_{21}}{\Delta x^2}, \qquad \widehat{b}_{1,i} = \frac{3}{2\Delta\tau} + \frac{2a_{21}}{\Delta x^2}, \quad \widehat{c}_{1,i} = -\frac{3}{2\Delta\tau} + \frac{a_{21}}{\Delta x^2},$$

$$\widehat{d}_{1,i} = \frac{3}{2\Delta\tau}u_{1,i}^n + \frac{3}{2\Delta\tau}u_{1,i+1}^n + a_{22}\frac{T_{1,i+1}^n - 2T_{1,i}^n + T_{1,i-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{1}{3}q_i^{n+\frac{1}{3}},$$

и получим систему трех диагональных алгебраических уравнений:

$$\widehat{a}_{1,i}\, u_{1,i-1}^{n+\frac{1}{3}} - \widehat{b}_{1,i}\, u_{1,i}^{n+\frac{1}{3}} + \widehat{c}_{1,i}\, u_{1,i+1}^{n+\frac{1}{3}} = -\widehat{d}_{1,i}. \tag{49}$$

Теперь, граничную условию (21) аппроксимируем по x при *i=1* получим:

$$\lambda_2\frac{-3u_{1,0}^{n+\frac{1}{3}} + 4u_{1,1}^{n+\frac{1}{3}} - u_{1,2}^{n+\frac{1}{3}}}{2\Delta x} = -\beta_2 u_{oc} + \beta_2 u_{1,0}^{n+\frac{1}{3}},$$

или

$$u_{1,2}^{n+\frac{1}{3}} = -3u_{1,0}^{n+\frac{1}{3}} + 4u_{1,1}^{n+\frac{1}{3}} + \frac{2\Delta x}{\lambda_2}\beta_2 u_{oc} - \frac{2\Delta x}{\lambda_2}\beta_2 u_{1,0}^{n+\frac{1}{3}}. \tag{50}$$

Из системы уравнении (49) когда i=*1* получим:

$$\widehat{a}_{1,1}\,u_{1,0}^{n+\frac{1}{3}}-\widehat{b}_{1,1}\,u_{1,1}^{n+\frac{1}{3}}+\widehat{c}_{1,1}\,u_{1,2}^{n+\frac{1}{3}}=-\widehat{d}_{1,1}$$

или

$$u_{1,2}^{n+\frac{1}{3}}=-\frac{\widehat{a}_{1,1}}{\widehat{c}_{1,1}}u_{1,0}^{n+\frac{1}{3}}+\frac{\widehat{b}_{1,1}}{\widehat{c}_{1,1}}u_{1,1}^{n+\frac{1}{3}}-\frac{\widehat{d}_{1,1}}{\widehat{c}_{1,1}}. \tag{51}$$

Поставив $u_{1,2}^{n+\frac{1}{3}}$ из (51) в (50) найдем $u_{1,0}^{n+\frac{1}{3}}$:

$$u_{1,0}^{n+\frac{1}{3}}=\frac{\lambda_2\widehat{b}_{1,1}-4\lambda_2\widehat{c}_{1,1}}{\widehat{a}_{1,1}\lambda_2-3\widehat{c}_{1,1}\lambda_2-2\Delta x\widehat{c}_{1,1}\beta_2}u_{1,1}^{n+\frac{1}{3}}+\frac{-\widehat{d}_{1,1}\lambda_2-2\Delta x\widehat{c}_{1,1}\beta_2 u_{oc}}{\widehat{a}_{1,1}\lambda_2-3\widehat{c}_{1,1}\lambda_2-2\Delta x\widehat{c}_{1,1}\beta_2}. \tag{52}$$

Вводя обозначение вместе (52) получим:

$$u_{1,0}^{n+\frac{1}{3}}=\widehat{\alpha}_{1,0}\,u_{1,1}^{n+\frac{1}{3}}+\widehat{\beta}_{1,0}. \tag{53}$$

Из соотношение (53) следуют, что прогоночные коэффициенты $\widehat{\alpha}_{1,0}$ и $\widehat{\beta}_{1,0}$ вычисляется с помощью:
$\widehat{\alpha}_{1,0}=\frac{\lambda_2\widehat{b}_{1,1}-4\lambda_2\widehat{c}_{1,1}}{\widehat{a}_{1,1}\lambda_2-3\widehat{c}_{1,1}\lambda_2-2\Delta x\widehat{c}_{1,1}\beta_2}$ и $\widehat{\beta}_{1,0}=\frac{-\widehat{d}_{1,1}\lambda_2-2\Delta x\widehat{c}_{1,1}\beta_2 u_{oc}}{\widehat{a}_{1,1}\lambda_2-3\widehat{c}_{1,1}\lambda_2-2\Delta x\widehat{c}_{1,1}\beta_2}$.

Теперь, граничную условию (22) аппроксимируя по x и при $i=N$ получим:

$$\lambda_2\frac{u_{1,N-2}^{n+\frac{1}{3}}-4u_{1,N-1}^{n+\frac{1}{3}}+3u_{1,N}^{n+\frac{1}{3}}}{2\Delta x}=-\beta_2 u_{oc}+\beta_2 u_{1,N}^{n+\frac{1}{3}},$$

или

$$(3\lambda_2-2\Delta x\beta_2)\,u_{1,N}^{n+\frac{1}{3}}=-\lambda_2 u_{1,N-2}^{n+\frac{1}{3}}+4\lambda_2 u_{1,N-1}^{n+\frac{1}{3}}-2\Delta x\beta_2 u_{oc}. \tag{54}$$

Применяя метод прогонки для последовательности *N, N-1* и *N-2* найдем $u_{1,N-1}^{n+\frac{1}{3}}$ и $u_{1,N-2}^{n+\frac{1}{3}}$:

$$u_{1,N-1}^{n+\frac{1}{3}}=\widehat{\alpha}_{1,N-1}u_{1,N}^{n+\frac{1}{3}}+\widehat{\beta}_{1,N-1}; \tag{55}$$

$$u_{1,N-2}^{n+\frac{1}{3}}=\widehat{\alpha}_{1,N-2}\widehat{\alpha}_{1,N-1}\,u_{N,j,k}^{n+\frac{1}{3}}+\widehat{\alpha}_{1,N-2}\widehat{\beta}_{1,N-1}+\widehat{\beta}_{1,N-2}; \tag{56}$$

Поставив $u_{1,N-1}^{n+\frac{1}{3}}$ из (55) и $u_{1,N-2}^{n+\frac{1}{3}}$ из (56) в (54) найдем $u_{1,N}^{n+\frac{1}{3}}$:

$$u_{1,N}^{n+\frac{1}{3}}=\frac{-\lambda_2\widehat{\alpha}_{1,N-2}\widehat{\beta}_{1,N-1}-\lambda_2\widehat{\beta}_{1,N-2}+4\lambda_2\widehat{\beta}_{1,N-1}-2\Delta x\beta_2 u_{oc}}{3\lambda_2-2\Delta x\beta_2+\lambda_2\widehat{\alpha}_{1,N-2}\widehat{\alpha}_{1,N-1}-4\lambda_2\widehat{\alpha}_{1,N-1}}. \tag{57}$$

Значения последовательности влаги $u_{1,N-1}^{n+\frac{1}{3}},\ u_{1,N-2}^{n+\frac{1}{3}},\ \ldots, u_{1,1}^{n+\frac{1}{3}}$ определяется методом обратной прогонки по уменьшению i последовательности:

$$u_{1,i}^{n+\frac{1}{3}}=\widehat{\alpha}_{1,i}\,u_{1,i+1}^{n+\frac{1}{3}}+\widehat{\beta}_{1,i}\,,\ i=\overline{N-1,\,1}. \tag{58}$$

Далее, аналогично для задачи Б, уравнение (23) аппроксимируем по y:

$$\frac{1}{2}\frac{T_{2,j}^{n+\frac{2}{3}}-T_{2,j}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta\tau/3}+\frac{1}{2}\frac{T_{2,j+1}^{n+\frac{2}{3}}-T_{2,j+1}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta\tau/3}=a_{11}\frac{T_{2,j+1}^{n+\frac{2}{3}}-2T_{2,j}^{n+\frac{2}{3}}+T_{2,j-1}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta y^2}+a_{12}\frac{u_{2,j+1}^{n+\frac{1}{3}}-2u_{2,j}^{n+\frac{1}{3}}+u_{2,j-1}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta y^2}+\frac{1}{3}f_{2,j}^{n+\frac{2}{3}}, \tag{59}$$

и группируя схожих членов в уравнение (59) получим:

$$\frac{a_{11}}{\Delta y^2}T_{2,j-1}^{n+\frac{2}{3}}-\left(\frac{3}{2\Delta\tau}+\frac{2a_{11}}{\Delta y^2}\right)T_{2,j}^{n+\frac{2}{3}}+\left(-\frac{3}{2\Delta\tau}+\frac{a_{11}}{\Delta y^2}\right)T_{2,j+1}^{n+\frac{2}{3}}=-\frac{3}{2\Delta\tau}T_{2,j}^{n+\frac{1}{3}}-$$

$$-\frac{3}{2\Delta\tau}T_{2,j+1}^{n+\frac{1}{3}}-a_{12}\frac{u_{2,j+1}^{n+\frac{1}{3}}-2u_{2,j}^{n+\frac{1}{3}}+u_{2,j-1}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta y^2}-\frac{1}{3}f_{2,j}^{n+\frac{2}{3}}.$$

Введем обозначения:

$$\overline{a}_{2,j}=\frac{a_{11}}{\Delta y^2}\,,\qquad \overline{b}_{i,j,k}=\frac{3}{2\Delta\tau}+\frac{2a_{11}}{\Delta y^2}\,,\quad \overline{c}_{i,j,k}=-\frac{3}{2\Delta\tau}+\frac{a_{11}}{\Delta y^2}\,,$$

$$\overline{d}_{2,j}=\frac{3}{2\Delta\tau}T_{2,j}^{n+\frac{1}{3}}+\frac{3}{2\Delta\tau}T_{2,j+1}^{n+\frac{1}{3}}+a_{12}\frac{u_{2,j+1}^{n+\frac{1}{3}}-2u_{2,j}^{n+\frac{1}{3}}+u_{2,j-1}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta y^2}+\frac{1}{3}f_{2,j}^{n+\frac{2}{3}},$$

и получим систему трех диагональных алгебраических уравнений:

$$\overline{a}_{2,j}T_{2,j-1}^{n+\frac{2}{3}}-\overline{b}_{2,j}T_{2,j}^{n+\frac{2}{3}}+\overline{c}_{2,j}T_{2,j+1}^{n+\frac{2}{3}}=-\overline{d}_{2,j}. \tag{60}$$

Теперь, граничную условию (26) аппроксимируем по y и при $j=1$ получим:

$$\lambda_1\frac{-3T_{2,0}^{n+\frac{2}{3}}+4T_{2,1}^{n+\frac{2}{3}}-T_{2,2}^{n+\frac{2}{3}}}{2\Delta y}=-\beta_1T_{oc}+\beta_1T_{2,0}^{n+\frac{2}{3}}-\varphi_j^n,$$

или

$$T_{2,2}^{n+\frac{2}{3}}=-3T_{2,0}^{n+\frac{2}{3}}+4T_{2,1}^{n+\frac{2}{3}}+\tfrac{2\Delta y}{\lambda_1}\beta_1T_{oc}-\tfrac{2\Delta y}{\lambda_1}\beta_1T_{2,0}^{n+\frac{2}{3}}+\tfrac{2\Delta y}{\lambda_1}\varphi_j^n, \tag{61}$$

где $\varphi_j^n=\eta\rho\gamma R\left(\tau\right)$.

Из системы уравнении (60) когда $j=1$ получим:

$$\overline{a}_{2,1}T_{2,0}^{n+\frac{2}{3}}-\overline{b}_{2,1}T_{2,1}^{n+\frac{2}{3}}+\overline{c}_{2,1}T_{2,2}^{n+\frac{2}{3}}=-\overline{d}_{2,1},$$

или

$$T_{2,2}^{n+\frac{2}{3}}=-\tfrac{\overline{a}_{2,1}}{\overline{c}_{2,1}}T_{2,0}^{n+\frac{2}{3}}+\tfrac{\overline{b}_{2,1}}{\overline{c}_{2,1}}T_{2,1}^{n+\frac{2}{3}}-\tfrac{\overline{d}_{2,1}}{\overline{c}_{2,1}}. \tag{62}$$

Поставив $T_{2,2}^{n+\frac{2}{3}}$ из (62) в (61) найдем $T_{2,0}^{n+\frac{2}{3}}$:

$$T_{2,0}^{n+\frac{2}{3}}=\tfrac{\lambda_1\overline{b}_{2,1}-4\lambda_1\overline{c}_{2,1}}{\overline{a}_{2,1}\lambda_1-3\overline{c}_{2,1}\lambda_1-2\Delta y\overline{c}_{2,1}\beta_1}T_{2,1}^{n+\frac{2}{3}}+\tfrac{-\overline{d}_{2,1}\lambda_1-2\Delta y\overline{c}_{2,1}\beta_1T_{oc}-2\Delta y\overline{c}_{2,1}\varphi_j^n}{\overline{a}_{2,1}\lambda_1-3\overline{c}_{2,1}\lambda_1-2\Delta y\overline{c}_{2,1}\beta_1}. \tag{63}$$

Вводя обозначение вместе (63) получим:

$$T_{2,0}^{n+\frac{2}{3}}=\overline{\alpha}_{2,0}T_{2,1}^{n+\frac{2}{3}}+\overline{\beta}_{2,0}. \tag{64}$$

Из соотношение (64) следуют, что прогоночные коэффициенты $\overline{\alpha}_{2,0}$ и $\overline{\beta}_{2,0}$ вычисляется с помощью:

$$\overline{\alpha}_{2,0}=\frac{\lambda_1\overline{b}_{2,1}-4\lambda_1\overline{c}_{2,1}}{\overline{a}_{2,1}\lambda_1-3\overline{c}_{2,1}\lambda_1-2\Delta y\overline{c}_{2,1}\beta_1},\ \overline{\beta}_{2,0}=\frac{-\overline{d}_{2,1}\lambda_1-2\Delta y\overline{c}_{2,1}\beta_1T_{oc}-2\Delta y\overline{c}_{2,1}\varphi_j^n}{\overline{a}_{2,1}\lambda_1-3\overline{c}_{2,1}\lambda_1-2\Delta y\overline{c}_{2,1}\beta_1}.$$

Далее, граничную условию (27) аппроксимируя по y получим и при $j= M$:

$$\lambda_1 \frac{T_{2,M-2}^{n+\frac{2}{3}} - 4T_{2,M-1}^{n+\frac{2}{3}} + 3T_{2,M}^{n+\frac{2}{3}}}{2\Delta y} = -\beta_1 T_{oc} + \beta_1 T_{2,M}^{n+\frac{2}{3}} - \varphi_j^n$$

или

$$\left(3\lambda_1 - 2\Delta y\beta_1\right) T_{2,M}^{n+\frac{2}{3}} = -\lambda_1 T_{2,M-2}^{n+\frac{2}{3}} + 4\lambda_1 T_{2,M-1}^{n+\frac{2}{3}} - 2\Delta y\beta_1 T_{oc} - 2\Delta y\varphi_j^n, \tag{65}$$

где $\varphi_j^n = \eta\rho\gamma R\left(\tau\right)$.

Применяя метод прогонки для последовательности *M, M-1* и *M-2* найдем $T_{2,M-1}^{n+\frac{2}{3}}$ и $T_{2,M-2}^{n+\frac{2}{3}}$:

$$T_{2,M-1}^{n+\frac{2}{3}} = \overline{\alpha}_{2,M-1}\, T_{2,M}^{n+\frac{2}{3}} + \overline{\beta}_{2,M-1}; \tag{66}$$

$$T_{2,M-2}^{n+\frac{2}{3}} = \overline{\alpha}_{2,M-2}\,\overline{\alpha}_{2,M-1}\, T_{2,M}^{n+\frac{2}{3}} + \overline{\alpha}_{2,M-2}\,\overline{\beta}_{2,M-1} + \overline{\beta}_{2,M-2}. \tag{67}$$

Поставив $T_{2,M-1}^{n+\frac{2}{3}}$ из (66) и $T_{2,M-2}^{n+\frac{2}{3}}$ из (67) в (65) найдем $T_{2,M}^{n+\frac{2}{3}}$:

$$T_{2,M}^{n+\frac{2}{3}} = \frac{-\lambda_1\overline{\alpha}_{2,M-2}\,\overline{\beta}_{2,M-1} - \lambda_1\overline{\beta}_{2,M-2} + 4\lambda_1\overline{\beta}_{2,M-1} - 2\Delta y\beta_1 T_{oc} - 2\Delta y\varphi_j^n}{3\lambda_1 - 2\Delta y\beta_1 + \lambda_1\overline{\alpha}_{2,M-2}\,\overline{\alpha}_{2,M-1} - 4\lambda_1\overline{\alpha}_{2,M-1}}. \tag{68}$$

Значения последовательности температуры $T_{2,M-1}^{n+\frac{2}{3}}, T_{2,M-2}^{n+\frac{2}{3}}, \ldots, T_{2,1}^{n+\frac{2}{3}}$ определяется методом обратной прогонки по уменьшению j последовательности:

$$T_{2,j}^{n+\frac{2}{3}} = \overline{\alpha}_{2,j} T_{2,j+1}^{n+\frac{2}{3}} + \overline{\beta}_{2,j},\, j = \overline{M-1,\, 1}. \tag{69}$$

Уравнение (24) аппроксимируем по y:

$$\frac{1}{2}\frac{u_{2,j}^{n+\frac{2}{3}} - u_{2,j}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta\tau/3} + \frac{1}{2}\frac{u_{2,j+1}^{n+\frac{2}{3}} - u_{2,j+1}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta\tau/3} = a_{21}\frac{u_{2,j+1}^{n+\frac{2}{3}} - 2u_{2,j}^{n+\frac{2}{3}} + u_{2,j-1}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta y^2} + +a_{22}\frac{T_{2,j+1}^{n+\frac{1}{3}} - 2T_{2,j}^{n+\frac{1}{3}} + T_{2,j-1}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta y^2} + \frac{1}{3}q_j^{n+\frac{2}{3}}, \tag{70}$$

и группируя схожих членов в уравнение (70) получим:

$$\frac{a_{21}}{\Delta y^2}u_{2,i-1}^{n+\frac{2}{3}} - \left(\frac{3}{2\Delta\tau} + \frac{2a_{21}}{\Delta y^2}\right)u_{2,j}^{n+\frac{2}{3}} + \left(-\frac{3}{2\Delta\tau} + \frac{a_{21}}{\Delta y^2}\right)u_{2,j+1}^{n+\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2\Delta\tau}u_{2,j}^{n+\frac{1}{3}} -$$

$$-\frac{3}{2\Delta\tau}u_{2,j+1}^{n+\frac{1}{3}} - a_{22}\frac{T_{2,j+1}^{n+\frac{1}{3}} - 2T_{2,j}^{n+\frac{1}{3}} + T_{2,j-1}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta y^2} - \frac{1}{3}q_j^{n+\frac{2}{3}}.$$

Введем обозначения:

$$\overline{\overline{a}}_{2,j} = \frac{a_{21}}{\Delta y^2}, \qquad \overline{\overline{b}}_{2,j} = \frac{3}{2\Delta\tau} + \frac{2a_{21}}{\Delta y^2}, \quad \overline{\overline{c}}_{2,j} = -\frac{3}{2\Delta\tau} + \frac{a_{21}}{\Delta y^2},$$

$$\overline{\overline{d_{2,j}}} = \frac{3}{2\Delta\tau}u_{2,j}^{n+\frac{1}{3}} + \frac{3}{2\Delta\tau}u_{2,j+1}^{n+\frac{1}{3}} + a_{22}\frac{T_{2,j+1}^{n+\frac{1}{3}} - 2T_{2,j}^{n+\frac{1}{3}} + T_{2,j-1}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta y^2} + \frac{1}{3}q_j^{n+\frac{2}{3}}.$$

и получим систему трех диагональных алгебраических уравнений:

$$\overline{\overline{a}}_{2,j}u_{2,j-1}^{n+\frac{2}{3}} - \overline{\overline{b}}_{2,j}u_{2,j}^{n+\frac{2}{3}} + \overline{\overline{c}}_{2,j}\, u_{2,j+1}^{n+\frac{2}{3}} = -\overline{\overline{d}}_{2,j}. \tag{71}$$

Теперь, граничную условию (28) аппроксимируем по y и при j=*1* получим:

$$\lambda_2 \frac{-3u_{2,0}^{n+\frac{2}{3}} + 4u_{2,1}^{n+\frac{2}{3}} - u_{2,2}^{n+\frac{2}{3}}}{2\Delta y} = -\beta_2 u_{oc} + \beta_2 u_{2,0}^{n+\frac{2}{3}},$$

или

$$u_{2,2}^{n+\frac{2}{3}} = -3u_{2,0}^{n+\frac{2}{3}} + 4u_{2,1}^{n+\frac{2}{3}} + \tfrac{2\Delta y}{\lambda_2}\beta_2 u_{oc} - \tfrac{2\Delta y}{\lambda_2}\beta_2 u_{2,0}^{n+\frac{2}{3}}. \tag{72}$$

Из системы уравнении (71) когда j=*1* получим:

$$\overline{\overline{a}}_{2,1} u_{2,0}^{n+\frac{2}{3}} - \overline{\overline{b}}_{2,1} u_{2,1}^{n+\frac{2}{3}} + \overline{\overline{c}}_{2,1}\, u_{2,2}^{n+\frac{2}{3}} = -\overline{\overline{d}}_{2,1},$$

или

$$u_{2,2}^{n+\frac{2}{3}} = -\tfrac{\overline{\overline{a}}_{2,1}}{\overline{\overline{c}}_{2,1}} u_{2,0}^{n+\frac{2}{3}} + \tfrac{\overline{\overline{b}}_{2,1}}{\overline{\overline{c}}_{2,1}} u_{2,1}^{n+\frac{2}{3}} - \tfrac{\overline{\overline{d}}_{2,1}}{\overline{\overline{c}}_{2,1}}. \tag{73}$$

Поставив $u_{2,2}^{n+\frac{2}{3}}$ из (73) в (72) найдем $u_{2,0}^{n+\frac{2}{3}}$:

$$u_{2,0}^{n+\frac{2}{3}} = \tfrac{\lambda_2 \overline{\overline{b}}_{2,1} - 4\lambda_2 \overline{\overline{c}}_{2,1}}{\overline{\overline{a}}_{2,1} - 3\overline{\overline{c}}_{2,1}\,\lambda_2 - 2\Delta y \overline{\overline{c}}_{2,1}\beta_2} u_{2,1}^{n+\frac{2}{3}} + \tfrac{-\overline{\overline{d}}_{2,1} - 2\Delta y \overline{\overline{c}}_{2,1}\beta_2 u_{oc}}{\overline{\overline{a}}_{2,1} - 3\overline{\overline{c}}_{2,1}\,\lambda_2 - 2\Delta y \overline{\overline{c}}_{2,1}\beta_2}. \tag{74}$$

Вводя обозначение вместе (74) получим:

$$u_{2,0}^{n+\frac{2}{3}} = \overline{\overline{\alpha}}_{2,0}\, u_{2,1}^{n+\frac{2}{3}} + \overline{\overline{\beta}}_{2,0}. \tag{75}$$

Из соотношение (75) следуют, что прогоночные коэффициенты $\overline{\overline{\alpha}}_{2,0}$ и $\overline{\overline{\beta}}_{2,0}$ вычисляется с помощью:

$\overline{\overline{\alpha}}_{2,0} = \frac{\lambda_2 \overline{\overline{b}}_{2,1} - 4\lambda_2 \overline{\overline{c}}_{2,1}}{\overline{\overline{a}}_{2,1} - 3\overline{\overline{c}}_{2,1}\,\lambda_2 - 2\Delta y \overline{\overline{c}}_{2,1}\beta_2}$ и $\overline{\overline{\beta}}_{2,0} = \frac{-\overline{\overline{d}}_{2,1} - 2\Delta y \overline{\overline{c}}_{2,1}\beta_2 u_{oc}}{\overline{\overline{a}}_{2,1} - 3\overline{\overline{c}}_{2,1}\,\lambda_2 - 2\Delta y \overline{\overline{c}}_{2,1}\beta_2}$.

Теперь аппроксимируя граничную условию (29) по y и при j= M получим:

$$\lambda_2 \frac{u_{2,M-2}^{n+\frac{2}{3}} - 4u_{2,M-1}^{n+\frac{2}{3}} + 3u_{2,M}^{n+\frac{2}{3}}}{2\Delta y} = -\beta_2 u_{oc} + \beta_2 u_{2,M}^{n+\frac{2}{3}},$$

или

$$(3\lambda_2 - 2\Delta y \beta_2)\, u_{2,M}^{n+\frac{2}{3}} = -\lambda_2 u_{2,M-2}^{n+\frac{2}{3}} + 4\lambda_2 u_{2,M-1}^{n+\frac{2}{3}} - 2\Delta y \beta_2 u_{oc}. \tag{76}$$

Применяя метод прогонки для последовательности *M, M-1* и *M-2* найдем $u_{2,M-1}^{n+\frac{2}{3}}$ и $u_{2,M-2}^{n+\frac{2}{3}}$:

$$u_{2,M-1}^{n+\frac{2}{3}} = \overline{\overline{\alpha}}_{2,M-1}\, u_{2,M}^{n+\frac{2}{3}} + \overline{\overline{\beta}}_{2,M-1}, \tag{77}$$

$$u_{2,M-2}^{n+\frac{2}{3}} = \overline{\overline{\alpha}}_{2,M-2}\overline{\overline{\alpha}}_{2,M-1}\, u_{2,M}^{n+\frac{2}{3}} + \overline{\overline{\alpha}}_{2,M-2}\overline{\overline{\beta}}_{2,M-1} + \overline{\overline{\beta}}_{2,M-2}. \tag{78}$$

Поставив $u_{2,M-1}^{n+\frac{2}{3}}$ из (77) и $u_{2,M-2}^{n+\frac{2}{3}}$ из (78) в (76) найдем $u_{2,M}^{n+\frac{2}{3}}$:

$$u_{2,M}^{n+\frac{2}{3}} = \tfrac{-\lambda_2 \overline{\overline{\alpha}}_{2,M-2}\overline{\overline{\beta}}_{2,M-1} - \lambda_2 \overline{\overline{\beta}}_{2,M-2} + 4\lambda_2 \overline{\overline{\beta}}_{2,M-1} - 2\Delta y \beta_2 u_{oc}}{3\lambda_2 - 2\Delta y \beta_2 + \lambda_2 \overline{\overline{\alpha}}_{2,M-2}\overline{\overline{\alpha}}_{2,M-1} - 4\lambda_2 \overline{\overline{\alpha}}_{2,M-1}}. \tag{79}$$

Значения последовательности влаги $u_{2,M-1}^{n+\frac{2}{3}}, u_{2,M-2}^{n+\frac{2}{3}}, \ldots, u_{2,1}^{n+\frac{2}{3}}$ определяется методом обратной прогонки по уменьшению j последовательности:

$$u_{2,j}^{n+\frac{2}{3}} = \overline{\overline{\alpha}}_{2,j}\, u_{2,j+1}^{n+\frac{2}{3}} + \overline{\overline{\beta}}_{2,j},\ \ j = \overline{M-1,\,1}. \tag{80}$$

Теперь, аналогично, для задачи B, уравнение (30) аппроксимируем по z:

$$\frac{1}{2}\frac{T_{3,k}^{n+1} - T_{3,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta\tau/3} + \frac{1}{2}\frac{T_{3,k+1}^{n+1} - T_{3,k+1}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta\tau/3} = a_{11}\frac{T_{3,k+1}^{n+1} - 2T_{3,k}^{n+1} + T_{3,k-1}^{n+1}}{\Delta z^2} +$$

$$+a_{12}\frac{u_{3,k+1}^{n+\frac{2}{3}} - 2u_{3,k}^{n+\frac{2}{3}} + u_{3,k-1}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta z^2} + \tfrac{1}{3}f_k^{n+1}; \tag{81}$$

и группируя схожих членов в уравнение (81) получим:

$$\frac{a_{11}}{\Delta z^2}T_{3,k-1}^{n+1} - \left(\frac{3}{2\Delta\tau} + \frac{2a_{11}}{\Delta z^2}\right)T_{3,k}^{n+1} + \left(-\frac{3}{2\Delta\tau} + \frac{a_{11}}{\Delta z^2}\right)T_{3,k+1}^{n+1} = -\frac{3}{2\Delta\tau}T_{3,k}^{n+\frac{2}{3}} -$$

$$-\frac{3}{2\Delta\tau}T_{3,k+1}^{n+\frac{2}{3}} - a_{12}\frac{u_{3,k+1}^{n+\frac{2}{3}} - 2u_{3,k}^{n+\frac{2}{3}} + u_{3,k-1}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta z^2} - \frac{1}{3}f_k^{n+1}.$$

Введем обозначения:

$$\widetilde{a_{3,k}} = \frac{a_{11}}{\Delta z^2}, \qquad \widetilde{b_{3,k}} = \frac{3}{2\Delta\tau} + \frac{2a_{11}}{\Delta z^2}, \quad \widetilde{c_{3,k}} = -\frac{3}{2\Delta\tau} + \frac{a_{11}}{\Delta z^2}\ ,$$

$$\widetilde{d_{3,k}} = \frac{3}{2\Delta\tau}T_{3,k}^{n+\frac{2}{3}} + \frac{3}{2\Delta\tau}T_{3,k+1}^{n+\frac{2}{3}} + a_{12}\frac{u_{3,k+1}^{n+\frac{2}{3}} - 2u_{3,k}^{n+\frac{2}{3}} + u_{3,k-1}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta z^2} + \frac{1}{3}f_k^{n+1};$$

и получим систему трех диагональных алгебраических уравнений:

$$\widetilde{a}_{3,k}T_{3,k-1}^{n+1} - \widetilde{b}_{3,k}T_{3,k}^{n+1} + \widetilde{c}_{3,k}T_{3,k+1}^{n+1} = -\widetilde{d}_{3,k}. \tag{82}$$

Теперь, граничную условию (33) аппроксимируем по z и при $k=1$ получим:

$$\frac{-3T_{3,0}^{n+1} + 4T_{3,1}^{n+1} - T_{3,2}^{n+1}}{2\Delta z} = 0,$$

или

$$T_{3,2}^{n+1} = -3T_{3,0}^{n+1} + 4T_{3,1}^{n+1}. \tag{83}$$

Из системы уравнении (82) когда $z=1$ получим:

$$\widetilde{a}_{3,1}T_{3,0}^{n+1} - \widetilde{b}_{3,1}T_{3,1}^{n+1} + \widetilde{c}_{3,1}T_{3,2}^{n+1} = -\widetilde{d}_{3,1};$$

$$T_{3,2}^{n+1} = -\tfrac{\widetilde{a}_{3,1}}{\widetilde{c}_{3,1}}T_{3,0}^{n+1} + \tfrac{\widetilde{b}_{3,1}}{\widetilde{c}_{3,1}}T_{3,1}^{n+1} - \tfrac{\widetilde{d}_{3,1}}{\widetilde{c}_{3,1}}. \tag{84}$$

Поставив $T_{3,2}^{n+1}$ из (84) в (83) найдем $T_{3,0}^{n+1}$:

$$T_{3,0}^{n+1} = \tfrac{\widetilde{b}_{3,1} - 4\widetilde{c}_{3,1}}{\widetilde{a}_{3,1} - 3\widetilde{c}_{3,1}}T_{3,1}^{n+1} - \tfrac{\widetilde{d}_{3,1}}{\widetilde{a}_{3,1} - 3\widetilde{c}_{3,1}}. \tag{85}$$

Вводя обозначение вместе (85) получим:

$$T_{3,0}^{n+1} = \widetilde{\alpha}_{3,0}T_{3,1}^{n+1} + \widetilde{\beta}_{3,0}; \tag{86}$$

где прогоночные коэффициенты $\widetilde{\alpha}_{3,0}$ и $\widetilde{\beta}_{3,0}$ вычисляется с помощью:

$$\widetilde{\alpha}_{3,0}=\frac{\widetilde{b}_{3,1}-4\widetilde{c}_{3,1}}{\widetilde{a}_{3,1}-3\widetilde{c}_{3,1}},\;\;\widetilde{\beta}_{3,0}=-\frac{\widetilde{d}_{3,1}}{\widetilde{a}_{3,1}-3\widetilde{c}_{3,1}}.$$

Теперь аппроксимируя граничную условию (34) по z, получим:

$$\lambda_1\tfrac{T^{n+1}_{3,L-2}-4T^{n+1}_{3,L-1}+3T^{n+1}_{3,L}}{2\Delta z}=-\beta_1T_{oc}+\beta_1T^{n+1}_{3,L}-\varphi^n_k; \tag{87}$$

где $\varphi^n_k=\eta\rho\gamma R\left(\tau\right)$.

Применяя метод прогонки для последовательности *L, L-1* и *L-2* найдем $T^{n+1}_{3,L-1}$ и $T^{n+1}_{3,L-2}$:

$$T^{n+1}_{3,L-1}=\widetilde{\alpha}_{3,L-1}\,T^{n+1}_{3,L}+\widetilde{\beta}_{3,L-1}; \tag{88}$$

$$T^{n+1}_{3,L-2}=\widetilde{\alpha}_{3,L-2}\,\widetilde{\alpha}_{3,L-1}\,T^{n+1}_{3,L}+\widetilde{\alpha}_{3,L-2}\widetilde{\beta}_{3,L-1}+\widetilde{\beta}_{3,L-2}. \tag{89}$$

Поставив $T^{n+1}_{3,L-1}$ из (88) и $T^{n+1}_{3,L-2}$ из (89) в (87) найдем $T^{n+1}_{3,L}$:

$$T^{n+1}_{3,L}=\tfrac{-\lambda_1\widetilde{\alpha}_{3,L-2}\widetilde{\beta}_{3,L-1}-\lambda_1\widetilde{\beta}_{3,L-2}+4\lambda_1\widetilde{\beta}_{3,L-1}-2\Delta z\beta_1T_{oc}-2\Delta z\varphi^n_k}{3\lambda_1-2\Delta z\beta_1+\lambda_1\widetilde{\alpha}_{3,L-2}\,\widetilde{\alpha}_{3,L-1}-4\lambda_1\widetilde{\alpha}_{3,L-1}}. \tag{90}$$

Значения последовательности температуры $T^{n+1}_{3,L-1}$, $T^{n+1}_{3,L-2}$, …, $T^{n+1}_{3,1}$, определяется методом обратной прогонки по уменьшению z последовательности:

$$T^{n+1}_{3,k}=\widetilde{\alpha}_{3,k}\,T^{n+1}_{3,k+1}+\widetilde{\beta}_{3,k},\;\;k=\overline{L-1,\,1}. \tag{91}$$

Уравнение (31) аппроксимируем по z:

$$\frac{1}{2}\frac{u^{n+1}_{3,k}-u^{n+\frac{2}{3}}_{3,k}}{\Delta\tau/3}+\frac{1}{2}\frac{u^{n+1}_{3,k+1}-u^{n+\frac{2}{3}}_{3,k+1}}{\Delta\tau/3}=a_{21}\frac{u^{n+1}_{3,k+1}-2u^{n+1}_{3,k}+u^{n+1}_{3,k-1}}{\Delta z^2}+$$

$$+a_{22}\tfrac{T^{n+\frac{2}{3}}_{3,k+1}-2T^{n+\frac{2}{3}}_{3,k}+T^{n+\frac{2}{3}}_{3,k-1}}{\Delta z^2}+\tfrac{1}{3}q^{n+1}_k; \tag{92}$$

и группируя схожих членов в уравнение (92) получим:

$$\frac{a_{21}}{\Delta z^2}u^{n+1}_{3,k-1}-\left(\frac{3}{2\Delta\tau}+\frac{2a_v}{\Delta z^2}\right)u^{n+1}_{3,k}+\left(-\frac{3}{2\Delta\tau}+\frac{a_v}{\Delta z^2}\right)u^{n+1}_{3,k+1}=-\frac{3}{2\Delta\tau}u^{n+\frac{2}{3}}_{3,k}-$$

$$-\frac{3}{2\Delta\tau}u^{n+\frac{2}{3}}_{3,k+1}-a_{22}\frac{T^{n+\frac{2}{3}}_{3,k+1}-2T^{n+\frac{2}{3}}_{3,k}+T^{n+\frac{2}{3}}_{3,k-1}}{\Delta z^2}-\frac{1}{3}q^{n+1}_k.$$

Введем обозначения:

$$\widetilde{\widetilde{a}}_{3,k}=\frac{a_{21}}{\Delta z^2},\qquad\widetilde{\widetilde{b}}_{3,k}=\frac{3}{2\Delta\tau}+\frac{2a_{21}}{\Delta z^2},\quad\widetilde{\widetilde{c}}_{3,k}=-\frac{3}{2\Delta\tau}+\frac{a_{21}}{\Delta z^2},$$

$$\widetilde{\widetilde{d}}_{3,k}=\frac{3}{2\Delta\tau}u^{n+\frac{2}{3}}_{3,k}+\frac{3}{2\Delta\tau}u^{n+\frac{2}{3}}_{3,k+1}+a_{22}\frac{T^{n+\frac{2}{3}}_{3,k+1}-2T^{n+\frac{2}{3}}_{3,k}+T^{n+\frac{2}{3}}_{3,k-1}}{\Delta z^2}+\frac{1}{3}q^{n+1}_k;$$

и получим систему трех диагональных алгебраических уравнений:

$$\widetilde{\widetilde{a}}_{3,k}\,u^{n+1}_{3,k-1}-\widetilde{\widetilde{b}}_{3,k}\,u^{n+1}_{3,k}+\widetilde{\widetilde{c}}_{3,k}\;u^{n+1}_{3,k+1}=-\widetilde{\widetilde{d}}_{3,k}. \tag{93}$$

Теперь, граничную условию (35) аппроксимируем по z и при *k=1* получим:

$$\frac{-3u_{3,0}^{n+1}+4u_{3,1}^{n+1}-u_{3,2}^{n+1}}{2\Delta z}=0. \tag{94}$$

Из системы уравнении (93) когда *z=1* получим:

$$\tilde{\tilde{a}}_{3,1}\,u_{3,0}^{n+1}-\tilde{\tilde{b}}_{3,1}\,u_{3,1}^{n+1}+\tilde{\tilde{c}}_{3,1}\;u_{3,2}^{n+1}=-\tilde{\tilde{d}}_{3,1}. \tag{95}$$

Поставив $u_{3,2}^{n+1}$ из (95) в (93) найдем $u_{3,0}^{n+1}$:

$$u_{3,0}^{n+1}=\frac{\tilde{\tilde{b}}_{3,1}-4\tilde{\tilde{c}}_{3,1}}{\tilde{\tilde{a}}_{3,1}-3\tilde{\tilde{c}}_{3,1}}\,u_{3,1}^{n+1}-\frac{\tilde{\tilde{d}}_{3,1}}{\tilde{\tilde{a}}_{3,1}-3\tilde{\tilde{c}}_{3,1}}. \tag{96}$$

Вводя обозначение вместе (96) получим:

$$u_{3,0}^{n+1}=\tilde{\tilde{\alpha}}_{3,0}\,u_{3,1}^{n+1}+\tilde{\tilde{\beta}}_{3,0}. \tag{97}$$

Из соотношение (97) следуют, что прогоночные коэффициенты $\tilde{\tilde{\alpha}}_{3,0}$ и $\tilde{\tilde{\beta}}_{3,0}$ вычисляется с помощью:

$$\tilde{\tilde{\alpha}}_{3,0}=\frac{\tilde{\tilde{b}}_{3,1}-4\tilde{\tilde{c}}_{3,1}}{\tilde{\tilde{a}}_{3,1}-3\tilde{\tilde{c}}_{3,1}},\;\tilde{\tilde{\beta}}_{3,0}=\frac{-\tilde{\tilde{d}}_{3,1}}{\tilde{\tilde{a}}_{3,1}-3\tilde{\tilde{c}}_{3,1}}.$$

Теперь аппроксимируя граничную условию (36) по z и при k=L получим:

$$\lambda_2\frac{u_{3,L-2}^{n+1}-4u_{3,L-1}^{n+1}+3u_{3,L}^{n+1}}{2\Delta z}=-\beta_2u_{oc}+\beta_2u_{3,L}^{n+1}. \tag{98}$$

Применяя метод прогонки для последовательности *L, L-1* и *L-2* найдем $u_{3,L-1}^{n+1}$ и $u_{3,L-2}^{n+1}$:

$$u_{3,L-1}^{n+1}=\tilde{\tilde{\alpha}}_{3,L-1}\,u_{3,L}^{n+1}+\tilde{\tilde{\beta}}_{3,L-1}; \tag{99}$$

$$u_{3,L-2}^{n+1}=\tilde{\tilde{\alpha}}_{3,L-2}\tilde{\tilde{\alpha}}_{3,L-1}\,u_{3,L}^{n+1}+\tilde{\tilde{\alpha}}_{3,L-2}\tilde{\tilde{\beta}}_{3,L-1}+\tilde{\tilde{\beta}}_{3,L-2}. \tag{100}$$

Поставив $u_{3,L-1}^{n+1}$ из (99) и $u_{3,L-2}^{n+1}$ из (100) в (98) найдем $u_{3,L}^{n+1}$:

$$u_{3,L}^{n+1}=\frac{-\lambda_2\tilde{\tilde{\alpha}}_{3,L-2}\tilde{\tilde{\beta}}_{3,L-1}-\lambda_2\tilde{\tilde{\beta}}_{3,L-2}+4\lambda_2\tilde{\tilde{\beta}}_{3,L-1}-2\Delta z\beta_2u_{oc}}{3\lambda_2-2\Delta z\beta_2+\lambda_2\tilde{\tilde{\alpha}}_{3,L-2}\tilde{\tilde{\alpha}}_{3,L-1}-4\lambda_2\tilde{\tilde{\alpha}}_{3,L-1}}. \tag{101}$$

Значения последовательности влаги $u_{3,L-1}^{n+1}$, $u_{3,L-2}^{n+1}$, $\ldots$, $u_{3,1}^{n+1}$ определяется методом обратной прогонки по уменьшению z последовательности:

$$u_{3,k}^{n+1}=\tilde{\tilde{\alpha}}_{3,k}\,u_{3,k+1}^{n+1}+\tilde{\tilde{\beta}}_{3,k},\;k=\overline{L-1,\,1}. \tag{102}$$

4 Выводы

Разработана математическая модель процесса тепло-влагопереноса натуральных продуктов под воздействием внутреннего тепловыделения и внешней температуры, протекающего под влиянием солнечной энергии.

Разработан алгоритм решения, основанный на метода покоординатного расщепления и при численном решении задачи использовано неявная разностная схема второго порядка точности, позволяющий определять изменения теплофизических параметров рассматриваемой системы. Получены пространственно-временные зависимости распределения температуры и влаги внутри пористой теле.

Разработанный алгоритм служат для исследования, прогнозирования и принятия управленческое решения в задачах тепло- влагопереноса в пористых телах, которые является актуальной проблемой в процессах хранения и переработки сельскохозяйственных продуктов и сырья.

Литература

[1] *Гринчик Н.Н.* Моделирование тепломассопереноса и поверхностных явлений в капиллярно-пористых средах на основе уравнений двухфазной фильтрации и изотерм сорбции // Современная наука: исследования, идеи, результаты, технологии. - Днепропетровск: НПВК «Триакон». - 2011. - Вып. 2(7). - С. 146 - 150.

[2] *Fedoseev A.V., Salnikov M.V., Sukhinin G.I.* Simulation of heat and moisture transfer in a porous material, IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1268, 2019, 012069, doi:10.1088/1742-6596/1268/1/012069

[3] *Левина Н.С.* Исследование кинетики нагрева и сушки пористых материалов // Ползуновский вестник № 1-2 2008. - С. 49 - 53.

[4] *Алексеев М.В., Кузнецов Г.В.* Численное моделирование тепломассопереноса при сушке древесины кондуктивным способом в условиях пониженного давления // Известия Томского политехнического университета. – Томск, 2011. – Т. 319, № 4. – С. 31-34.

[5] *Maliki M., Laredj N., Bendani K., Missoum H.* Two-dimensional transient modeling of energy and mass transfer in porous building components using comsol multiphysics // Journal of Applied Fluid Mechanics, Vol. 10, No. 1, pp. 319-328, 2017. DOI: 10.18869/acadpub.jafm.73.238.26484

[6] *Лыков А.В., Михайлов Ю.А.* Теория тепло- и массопереноса. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1963. – 535 с.

[7] *Лыков А.В.* Теория сушки // М.: Энергия, 1968. – 472 с.

[8] *Irudayaraj J., Wu Y.* Analysis and application of Luikov's heat, mass, and pressure transfer model to a capillary porous media // Drying Technology, 14 (3-4), 1996 y., pp. 803-824.

[9] *Афанасьев А.М., Сипливый Б.Н.* Алгоритм совместного решения уравнений тепломассопереноса и уравнений электромагнитного поля при сушке свч-излучением // Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер. 1, ISSN 2222-8896., Мат. Физ. 2017. № 2 (39).

[10] *Pandey R.N., Srivastava S.K., Mikhailov M.D.* Solutions of Luikov equations of heat and mass transfer in capillary porous bodies through matrix calculus: a new approach // International Journal of Heat and Mass Transfer 42. 1999 y., pp. 2649-2660.

[11] *Younsi R., Kocaefe D., Kocaefe Y.* Three-dimensional simulation of heat and moisture transfer in wood // Applied Thermal Engineering 26, 2006, pp. 1274–1285.

[12] *Ravshanov N., Shadmanov I.U.* Mathematical model for the study and prediction of a porous body thermal state // 2019 IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 537 022024.

[13] *Afolabi T.J., Agarry S.E.* Mathematical modeling and simulation of the mass and heat transfer of batch convective air drying of tropical fruits // Chemical and Process Engineering Research. ISSN 2224-7467 (Paper) ISSN 2225-0913 (Online). Vol.23. 2014., pp. 9-19.

[14] *Болотов И.А.* Математическое моделирование процессов тепло- и массопереноса во вращающихся телах. Монография // Болотов И.А., Мизонов В.Е., Зайцев В.А., Жуков П.В. – Иваново: ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет», 2010. – 56 с.

[15] *Fang Long Zhu., Zhou Y.* Modelling Heat-Moisture Transport through Firefighters' Protective Fabrics from an Impinging Flame Jet by Simulating the Drying Process // Fibres & textiles in Western Europe 2013; 21, 5(101). pp. 85-90.

[16] *Фролов Р.Н., Цебренко К.Н.* Моделирование процесса тепломассопереноса в капиллярно-пористом теле с использованием параллельных вычислений // Известия вузов. Пищевая технология, № 1, 2012. – С. 79-84.

[17] *Жидко В.И., Бомко А.С* Моделирование процессов тепло- и массопереноса при сушке зерна // Современные наукоёмкие технологии. – Москва, 2010. – № 2. – С. 36-39.

[18] *Равшанов Н., Шадманов И.У.* Математическая модель термического состояния трехмерного пористого тела под влиянием солнечной энергии // Информационные технологии моделирования и управления, 2019, №4(118). С. 258-268.

[19] *Ravshanov N., Shadmanov I.U.* Multidimensional model of heat-moisture transport in porous media // Journal of Physics: Conference Series 1546 (2020) 012098 IOP Publishing. doi: 10.1088 / 1742-6596 / 1546/1/012098.

[20] *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физикиизд. «Наука», 1967.

[21] *Самарский А.А.* О принципе аддитивности для построения экономичных разностных схем // ДАН СССР. 1965. № 6(165). С. 226–232.

[22] *Марчук Г.И.* Методы расщепления. М: Наука, 1988.

[23] *Крайнов А.Ю., Миньков Л.Л.* Численные методы решения задач тепло- и массопереноса: учеб. пособие. – Томск: STT, 2016. – 92 с.

[24] *Воеводин А.Ф., Гончарова О.Н.* Метод расчета двумерных задач конвекции на основе расщепления по физическим процессам // Вычислительные технологии. 2002. № 1(7). С. 69–75.

[25] *Равшанов Н., Мурадов Ф.А., Шафиев Т.Р.* Математическая модель и эффективный численный алгоритм для мониторинга и прогнозирования концентрации вредных веществ в атмосфере с учётом физико-механических свойств частиц // Проблемы вычислительной и прикладной математики. –2020. –№5(29). –С.120-140.

[26] *Гончарова О.Н.* Метод расщепления по физическим процессам для расчета трехмерных задач конвекции // Известия Алтайского государственного университета. 2007. № 1. С. 39–44.

Поступила в редакцию 20.11.2020

UDC 004.94:519.637

MATHEMATICAL MODEL AND EFFICIENT NUMERICAL ALGORITHM FOR STUDYING HEAT-MOISTURE TRANSFER PROCESSES IN POROUS MEDIA

Shadmanov I. U.

i.shadmanov@mathinst.uz

Bukhara Branch of the V.I.Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,

11, Muhammad Ikbol, Bukhara, 200114 Uzbekistan.

The article discusses a multidimensional mathematical model and a numerical algorithm for the process of heat and moisture transfer, taking into account such factors as the intrinsic heat and moisture release of a natural product, the influence of changes in temperature and moisture in the environment during storage and drying of porous materials. The developed model and numerical algorithm make it possible to predict changes in temperature and moisture at arbitrary points of a porous body, and also serve to prevent loss of quality and spontaneous combustion of materials exposed to solar radiation. Based on the method of splitting by coordinates, a numerical algorithm for calculating three-dimensional problems of heat and moisture transfer in areas of the parallelepiped type is presented. An implicit second-order difference scheme for calculating the required functions is presented.

Keywords: mathematical model, heat transfer, moisture transfer, internal heat and moisture release, splitting by coordinates, porous medium.

Citation: Shadmanov I. U. 2021. Mathematical model and efficient numerical algorithm for studying heat-moisture transfer processes in porous media. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 2(32): 117-134.