



BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI



Научный вестник Бухарского государственного университета
Scientific reports of Bukhara State University

3/2024

E-ISSN 2181-1466



9 772181 146004

ISSN 2181-6875



9 772181 687004



@buxdu_uz



@buxdu1



@buxdu1



www.buxdu.uz

3/2024

<https://buxdu.uz>

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI
SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY
НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК БУХАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Ilmiy-nazariy jurnal
2024, № 3, mart

Jurnal 2003-yildan boshlab **filologiya** fanlari bo'yicha, 2015-yildan boshlab **fizika-matematika** fanlari bo'yicha, 2018-yildan boshlab **siyosiy** fanlar bo'yicha, **tarix** fanlari bo'yicha 2023 yil 29 avgustdan boshlab O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo'lgan zaruriy nashrlar ro'yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2000-yilda tashkil etilgan.

Jurnal 1 yilda 12 marta chiqadi.

Jurnal O'zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2020-yil 24-avgust № 1103-sonli guvohnoma bilan ro'yxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti

Tahririyat manzili: 200117, O'zbekiston Respublikasi, Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko'chasi, 11-uy.

Elektron manzil: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

TAHRIR HAY'ATI:

Bosh muharrir: Xamidov Obidjon Xafizovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Bosh muharrir o'rinbosari: Rasulov To'liqin Husenovich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor

Mas'ul kotib: Shirinova Mexrigiyo Shokirovna, filologiya fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)

Kuzmichev Nikolay Dmitriyevich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor (N.P. Ogaryov nomidagi Mordova milliy tadqiqot davlat universiteti, Rossiya)

Danova M., filologiya fanlari doktori, professor (Bolgariya)

Margianti S.E., iqtisodiyot fanlari doktori, professor (Indoneziya)

Minin V.V., kimyo fanlari doktori (Rossiya)

Tashqarayev R.A., texnika fanlari doktori (Qozog'iston)

Mo'minov M.E., fizika-matematika fanlari nomzodi (Malayziya)

Mengliyev Baxtiyor Rajabovich, filologiya fanlari doktori, professor

Adizov Baxtiyor Rahmonovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Abuzalova Mexriniso Kadirovna, filologiya fanlari doktori, professor

Amonov Muxtor Raxmatovich, texnika fanlari doktori, professor

Barotov Sharif Ramazonovich, psixologiya fanlari doktori, professor, xalqaro psixologiya fanlari akademiyasining haqiqiy a'zosi (akademigi)

Baqoyeva Muhabbat Qayumovna, filologiya fanlari doktori, professor

Bo'riyev Sulaymon Bo'riyevich, biologiya fanlari doktori, professor

Jumayev Rustam G'aniyevich, siyosiy fanlar nomzodi, dotsent

Djurayev Davron Raxmonovich, fizika-matematika fanlari doktori, professor

Durdiyev Durdimurod Qalandarovich, fizika-matematika fanlari doktori, professor

Olimov Shirinboy Sharofovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Qahhorov Siddiq Qahhorovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Umarov Baqo Bafoyevich, kimyo fanlari doktori, professor

Murodov G'ayrat Nekovich, filologiya fanlari doktori, professor

O'rayeva Darmonoy Saidjonovna, filologiya fanlari doktori, professor

Navro'z-zoda Baxtiyor Nigmatovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Hayitov Shodmon Ahmadovich, tarix fanlari doktori, professor

To'rayev Halim Hojiyevich, tarix fanlari doktori, professor

Rasulov Baxtiyor Mamajonovich, tarix fanlari doktori, professor

Eshtayev Alisher Abdug'aniyevich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Quvvatova Dilrabo Habibovna, filologiya fanlari doktori, professor

Axmedova Shoira Nematovna, filologiya fanlari doktori, professor

Bekova Nazora Jo'rayevna, filologiya fanlari doktori (DSc), professor

Amonova Zilola Qodirovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Hamroyeva Shahlo Mirjonovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Nigmatova Lola Xamidovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Boboyev Feruz Sayfullayevich, tarix fanlari doktori

Jo'rayev Narzulla Qosimovich, siyosiy fanlar doktori, professor

Xolliyev Askar Ergashovich, biologiya fanlari doktori, professor

Artikova Hafiza To'ymurodovna, biologiya fanlari doktori, professor

Hayitov Shavkat Ahmadovich, filologiya fanlari doktori, professor

Qurbonova Gulnoz Negmatovna, pedagogika fanlari doktori (DSc), professor

Ixtiyarova Gulnora Akmalovna, kimyo fanlari doktori, professor

Rasulov Zubaydullo Izomovich, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Mirzayev Shavkat Mustaqimovich, texnika fanlari doktori, professor

Samiyev Kamoliddin A'zamovich, texnika fanlari doktori, dotsent

Esanov Husniddin Qurbonovich, biologiya fanlari doktori, dotsent

Zaripov Gulmurot Toxirovich, texnika fanlari nomzodi, professor

Jumayev Jura, fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent

Klichev Oybek Abdurasulovich, tarix fanlari doktori, dotsent

G'aybulayeva Nafisa Izattullayevna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

MUNDARIJA *** СОДЕРЖАНИЕ *** CONTENTS

МАТЕМАТИКА * MATHEMATICS *** МАТЕМАТИКА**

Болтаев З.И., Собиров С.Ж., Рузиева М.А.	Не осесимметричные задачи стационарного напряжённого состояния в соосных вязкоупругих оболочках с жидкостью между ними	3
Xudayarov S.S., Ergashov O.H.	Simpleksni saqlovchi kvadratik operator qo'zg'almas nuqtalarning tipini aniqlash usullari haqida	11
Жураева У.Ю.	О некоторой теореме для бигармонических функций	16
Jamolov Sh.J., Rahmonov E.S.	Kvadratik stoxastik operatorlar	21
Ro'ziyeva N.K.	Kvadrat funksiyani yechish usullari	26
Ergashov O.H.	Bir nostoxastik kvadratik operator qo'zg'almas nuqtalari haqida	32
Almuratov F.M., Pardabaev M.A., Bobonazarova A.U.	Expansion of eigenvalues of Schrödinger-type operators on two dimensional lattices	37
Eshbekov R.Kh., Tashaeva M.G., Usmonova Sh.B.	On the complex modified Korteweg-de Vries equation with finite density	45
Сипатдинова Б.К.	Об одной периодической краевой задаче для трёхмерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в неограниченном параллелепипеде	54
Imomova Sh.M., Amonova N.A.	Chekli elementlar usullari	73
FIZIKA *** PHYSICS *** ФИЗИКА		
Элманов А.Б., Кенгбоев С.А.	Увеличение срока службы детали для промышленных хлопкоочистительных машин	82
Abdullayev J.Sh., Sapaev I.B.	The effects of temperature on the intrinsic electrophysical parameters of Ge, Si, and Gaas	86
Turayev A.A., Kamolova O.A.	Polikristall yarimo'tkazgich olishning ahamiyati	91

To'rayev Sh.D., Norqulov U.E.	O'zgaruvchan tok tarmog'ida kollektorli dvigatellardan foydalanish	95
Urunov B.J., To'ychiyev A.J., Xujaqulov N.B.	Gidrotexnika inshootlarida nasos agregatini foydalanishga tayyorlash, ishga tushirish va topshirish sinovlari	100
Xujanova D.Sh., Xujanov A.Sh.	Kremniy asosidagi gibrid strukturalar	105
Элманов А.Б.	Важнейшее технологическое эксплуатационное свойство швейного материала и растяжимая деформация нити в кольце	111
Kengboyev S.A.	Technologik asbob-uskunalar qismlarini elektron nur bilan azotlash bo'yicha tadqiqot (Yuqori sifatli U9A po'lat)	117
KIMYO *** CHEMISTRY *** КИМЁ		
Ergasheva N.M.	Kristallarda modulyatsiyalangan magnitli strukturalarni modellashtirish usullari	123
Содиков М.К., Эргашев Л.Б., Турсунов Д.Ж.	Ацетилен спиртлари эфирларнинг синтез жараёнлари натижаларини моделлаштириш ва физик-кимёвий ҳисоблашлар	128
Xudoynazarova G.A.	Polimerlarning molekulyar massasini aniqlash usullari	134
BIOLOGIYA *** BIOLOGY *** БИОЛОГИЯ		
Тўхтаев Ш.Х.	Олтингугурт препаратлари ва токни ҳар хил касалликларига қарши янги кураш чоралари	140
Xolmurodov B.B., Uzakova Sh.I., Suyunova L.A.	Экстракция веществ из растения Alhagi Maurorum (верблюжья колючка) и применение в фармакологии	147
INFORMATIKA *** INFORMATICS *** ИНФОРМАТИКА		
Nurulloev F.N., Zikirova F.M.	Python dasturlash tilida Doubly Linked Listdan foydalanish	154

CHEKLI ELEMENTLAR USULLARI

Imomova Shafolat Mahmudovna,

BuxDU Amaliy matematika va dasturlash texnologiyalari kafedrasida dotsenti

s.m.imomova@buxdu.uz

Amonova Nilufar Avaz qizi,

BuxDU Amaliy matematika va dasturlash texnologiyalari kafedrasida o'qituvchisi

n.a.amonova@buxdu.uz

Annotatsiya. Oddiy differensial tenglamalar uchun qo'yilgan chegaraviy masalalarni taqribiy yechishning ko'plab usullari mavjud. Masalan: Koshi masalasiga ya'ni boshlang'ich masalaga keltirib yechiladigan usullar (o'q otish usuli, reduksiya usuli, differensial progonka usuli), chekli ayirmalar usuli, kollokatsiya usuli, kichik kvadratlar usuli, proyeksiya usullar (momentlar usuli), balanslar usuli yoki integro-interpolyatsion usul, Fredholm integral tenglamalariga keltiriladigan usullar va hokazo. Biz ushbu maqolada chegaraviy masalaning taqribiy qiymatini analitik ifoda va diskret shaklda topishga imkon beradigan chekli elementlar usuli bilan tanishamiz.

Kalit so'zlar: oddiy differensial tenglamalar, chegaraviy masala, chekli elementlar usuli, bazis funksiya, Galerkin usuli, Rits usuli, xatolik, to'r, ortogonal, tenglama, kvadratur formula, chiziqli forma, bichiziqli forma, taqribiy yechim, aniq yechim.

МЕТОДЫ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Абстрактный. Существует несколько методов приближенного решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Например: задача Коши, то есть методы, которые решаются на основе исходной задачи (метод расстрела, метод приведения, метод дифференциальной прогонки), метод конечных разностей, метод коллокаций, метод наименьших квадратов, методы проекции (метод моментов), метод баланса. или метод интегро-интерроляции, методы приведения интегральных уравнений Фредгольма и т. д. В этой статье мы познакомимся с методом конечных элементов, который позволяет аппроксимировать краевую задачу в аналитическом выражении и в дискретном виде.

Key words: Ordinary differential equations, boundary value problem, finite element method, basis function, Galerkin method, Ritz method, error, grid, orthogonal, equation, quadrature formula, linear form, bilinear form, approximate solution, exact solution.

FINITE ELEMENT METHODS

Abstract. There are several methods of approximate solution of boundary value problems for ordinary differential equations. For example: Cauchy's problem, that is, methods that are solved based on the initial problem (shooting method, reduction method, differential progonka method), finite difference method, collocation method, least squares method, projection methods (moment method), balance method or integro-interpolation method, methods of bringing Fredholm integral equations, etc. In this article, we will get acquainted with the finite element method, which allows us to approximate the boundary value problem in an analytical expression and in a discrete form.

Keywords: Ordinary differential equations, boundary value problem, finite element method, basis function, Galerkin method, Ritz method, error, grid, orthogonal, equation, quadrature formula, linear form, bilinear form, approximate solution, exact solution.

Kirish. Hozirgi kunda chekli elementlar usuli amaliy masalalarni yechishning eng keng tarqalgan usullaridan biri, masalan, issiqlik jarayonlarini, mustahkamlik hisoblarini, suyuqlik dinamikasi muammolarini o'rganish. Usulning qo'llanilishi qulayligi, uning har qanday murakkab shaklli soha uchun ham qo'llanilishi soddaligi sababli, bu usul amaliyotchi va ayniqsa, muhandislar orasida keng qo'llanilib kelinmoqda. Bu usul asosida ishlab chiqarish tizimining bir qator hisoblari muvaffaqiyatli hal qilinmoqda. Bu esa chekli elementlar usulining amaliy ahamiyati naqadar yuqori ekanligini bildiradi.

Asosiy qism. *Chekli elementlar usuli orqali masalani yechishning bosqichlari:*

Chekli elementlarni tanlash. Bir o'lovli masalada bu to'g'ri chiziq kesmasi. Ikki o'lovli masalada bu uchburchakli (simpleks) element, to'g'ri to'rtburchakli element, umumiy holda ixtiyoriy shakl bo'lib, ular yordamida tadqiqot sohasi kesishmaydigan qism sohalarga ajratiladi, bunda element qancha murakkab bo'lsa integrallarni hisoblashda katta qiyinchiliklar bilan to'qnashiladi. Shuning uchun eng ko'p qo'llaniladiganlari uchburchakli elementlar va tomonlari koordinat o'qlariga parallel bo'lgan to'g'ri to'rtburchakli elementlar. Uch o'lovli sohalar uchun esa – tetraedr va parallelepipeddir.

Sohani chekli elementlarga ajratish (To'rt hosil qilish). Chekli ayirmali usuldan farqli ravishda bo'linishlarni notekis olish va fazoviy o'zgaruvchilar gradiyentini aprior hisobga olgan holda bajarish, ya'ni fazoviy o'zgaruvchilar tez o'zgarishi kutiladigan sohalarda to'rtlar zich va aksincha. Sohani chekli elementlarga avtomatik bo'lishning har xil uslublari mavjud, chunki bu bosqichni qo'lda bajarish mashaqqatli va ko'pincha xatoliklarga olib keladi.

Bazis funksiyalarni tanlash. Masalani yechishning talab qilingan va hisoblash sistemasining imkoniyatlaridan kelib chiqib, chiziqli, kvadratik yoki yuqoriroq darajadagi bazis funksiyalar tanlanadi, bunda approksimatsiya tugunlari soni eng kami bilan approksimatsiyalovchi funksiyalar tartibidan bir birlikka katta bo'lishi lozim.

Koeffitsiyentlar matritsasini va yuklanishlar vektorini tuzish.

Chegaraviy shartlarni hisobga olish.

Chekli algebraik tenglamalar sistemasini yechish. Bunda koeffitsiyentlar matritsasining xususiyatlari e'tiborga olinishi mumkin, chunki bu matritsa lenta shaklida bo'ladi.

1. Galerkin usuli.

Yuqorida berilgan masala yechish bosqichlarini quyidagi masalada qo'llaymiz:

$$-u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0,$$

Bir o'lovli bir jinsli chegaraviy qiymat masalasini Galerkin chekli elementlar usulidan foydalanib yechish[1].

Kuchsiz formani hosil qilish. Differensial tenglamaning ikkala tomonini chegaraviy shartlarni $v(0) = 0, v(1) = 0$ qanoatlantiruvchi $v(x)$ test funksiyasiga ko'paytirish orqali *variatsion yoki kuchsiz formulani* tuziladi.

$$-u''v = fv$$

va 0 dan 1 gacha integrallab (bo'laklab integrallashdan foydalanib) quyidagi tenglik hosil qilinadi:

$$\int_0^1 (-u''v)dx = -u'v \Big|_0^1 + \int_0^1 u'v'dx = \int_0^1 u'v'dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 u'v'dx = \int_0^1 fvd x$$

To'rni generatsiya qilish, masalan, bir jinsli Dekart to'ri $x_i = ih, i = 0, 1, \dots, n$ bunda $h = 1/n, (x_{i-1}, x_i), i = 1, 2, \dots, n$ intervallarni aniqlash.

To'rga asoslangan bazis funksiyalar to'plamini qurish. Eng sodda bazis funksiyalar to'plami ya'ni bo'lakli-chiziqli funksiyalar to'plamidan foydalanish mumkin. ($i = 1, 2, \dots, n - 1$)

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h}, & \text{agar } x_{i-1} \leq x < x_i, \\ \frac{x_{i+1} - x}{h}, & \text{agar } x_i \leq x < x_{i+1}, \\ 0, & \text{boshqa hollarda} \end{cases}$$

bo'lakli-chiziqli funksiyalar to'plami grafigidan kelib chiqib, *shapkacha funksiyalar to'plami* deb ham yuritiladi.

Taqribiy yechimni bazis funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi bilan ifodalash. Taqribiy yechim quyidagicha, ko'phadlar yig'indisi ko'rinishida ifodanadi:

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^{n-1} c_j \varphi_j(x)$$

bu yerda c_j koeffitsientlar aniqlanishi kerak bo'lgan noma'lumlar. Shapkacha bazis funksiyalarini tanlangani tufayli, $u_n(x)$ ham bo'lakli-chiziqli funksiya bo'ladi. $\int_0^1 u'v'dx = \int_0^1 fvd x$ kuchsiz formadagi

$u(x)$ aniq yechimni $u_h(x)$ taqribiy yechim bilan almashtirish orqali, koeffitsiyentlar uchun chiziqli tenglamalar sistemasini hosil bo'radi ya'ni

$$\int_0^1 u'_h v' dx = \int_0^1 f v dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \sum_{j=1}^{n-1} c_j \varphi'_j v' dx = \sum_{j=1}^{n-1} c_j \int_0^1 \varphi'_j v' dx = \int_0^1 f v dx.$$

Keyin, $v(x)$ test funksiyani ketma-ket $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$ dek tanlab, chiziqli tenglamalar sistemasini tuziladi (qo'shimcha xatoliklarga yo'l qo'yilganligini ta'kidlab).

$$\left(\int_0^1 \varphi'_1 \varphi'_1 dx \right) c_1 + \dots + \left(\int_0^1 \varphi'_1 \varphi'_{n-1} dx \right) c_{n-1} = \int_0^1 f \varphi_1 dx$$

$$\left(\int_0^1 \varphi'_2 \varphi'_1 dx \right) c_1 + \dots + \left(\int_0^1 \varphi'_2 \varphi'_{n-1} dx \right) c_{n-1} = \int_0^1 f \varphi_2 dx$$

$$\dots$$

$$\left(\int_0^1 \varphi'_i \varphi'_1 dx \right) c_1 + \dots + \left(\int_0^1 \varphi'_i \varphi'_{n-1} dx \right) c_{n-1} = \int_0^1 f \varphi_i dx$$

$$\dots$$

$$\left(\int_0^1 \varphi'_{n-1} \varphi'_1 dx \right) c_1 + \dots + \left(\int_0^1 \varphi'_{n-1} \varphi'_{n-1} dx \right) c_{n-1} = \int_0^1 f \varphi_{n-1} dx$$

matritsa-vektor shaklida yozsak:

$$\begin{bmatrix} a(\varphi_1 \varphi_1) & a(\varphi_1 \varphi_2) & \dots & a(\varphi_1 \varphi_{n-1}) \\ a(\varphi_2 \varphi_1) & a(\varphi_2 \varphi_2) & \dots & a(\varphi_2 \varphi_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(\varphi_{n-1} \varphi_1) & a(\varphi_{n-1} \varphi_2) & \dots & a(\varphi_{n-1} \varphi_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f, \varphi_1 \\ f, \varphi_2 \\ \vdots \\ f, \varphi_{n-1} \end{bmatrix}$$

bunda

$$a(\varphi_i \varphi_j) = \int_0^1 \varphi'_i \varphi'_j dx, \quad (f, \varphi_i) = \int_0^1 f \varphi_i dx.$$

$a(u, v)$ bichiziqli forma deb ataladi, chunki u har bir o'zgaruvchiga (funksiyaga) chiziqli va (f, v) – chiziqli forma deyiladi. Agar φ_i bazis funksiyalar sifatida shapkacha funksiyalar to'plami tanlangan bo'lsa, u holda

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & & & & & & & \\ & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & & & & & \\ & & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & & \\ & & & & & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 f \varphi_1 dx. \\ \int_0^1 f \varphi_2 dx. \\ \int_0^1 f \varphi_3 dx. \\ \vdots \\ \int_0^1 f \varphi_{n-2} dx. \\ \int_0^1 f \varphi_{n-1} dx. \end{bmatrix}$$

kelib chiqadi.

Koeffitsientlar uchun chiziqli tenglamalar sistemasini yechish. Hosil qilingan tenglamalar sistemasini yechib, $u_h(x) = \sum_i c_i \varphi_i(x)$ taqribiy yechim hosil qilinadi.

Xatoliklar tahlilini o'tkazish. Har bir masalada bo'lgani kabi xatolik darajasi baholanadi. Buni jadval qiymatlari yoki grafiklardan foydalanib amalga oshirish mumkin.

Galerkin usulining soddaroq ko‘rinishini taqdim etamiz. Faraz qilaylik, quyidagi chiziqli chegaraviy masala berilgan bo‘lsin:

$$L[y] = f(x), \tag{1.1}$$

bunda

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y$$

hamda

$$\begin{aligned} \Gamma_a[y] &\equiv \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A; \\ \Gamma_b[y] &\equiv \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \\ |\alpha_0| + |\alpha_1| &\neq 0, \quad |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

chegaraviy shartlar mavjud.

Biror bir to‘la sistemaning qismidan iborat bo‘lgan $\{u_i(x)\}$ ($i = 0, 1, \dots, n$) bazis funksiyalarning chekli sistemasini tanlanadi, bunda $u_0(x)$ funksiya

$$\Gamma_a[u_0] = A, \quad \Gamma_b[u_0] = B$$

bir jinsli bo‘lmagan chegaraviy shartlarni qanoatlantiradigan bo‘lishi va $u_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) funksiyalar

$$\Gamma_a[u_i] = \Gamma_b[u_i] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

bir jinsli chegaraviy shartlarini qanoatlantiradigan bo‘lishi kerak. (1.1)-(2.2) chegaraviy masalaning yechimini

$$y(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i u_i(x) \tag{1.3}$$

ko‘rinishda izlanadi.

Tanlangan $u_i(x)$ bazis funksiyalarda (1.3) formula bilan aniqlangan y funksiya, ko‘rinib turibdiki, C_i koeffitsiyentlarning ixtiyoriy tanlanishida (1.2) chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi. (1.3) ifodani (1.1) tenglamaga qo‘yilganda, bu quyidagi xatolikni beradi:

$$R(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = L[u_0] + \sum_{i=1}^n C_i L[u_i] - f(x).$$

Chegaraviy masalaning aniq yechimi y da $R \equiv 0$ bo‘ladi; shuning uchun aniq yechimga yaqin taqribiy yechimni olish uchun, C_i koeffitsiyentlarni R funksiya qandaydir ma‘noda kichik bo‘ladigan qilib tanlash o‘rinli. Galerkin usuliga asosan R xatolik $u_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) bazis funksiyalarga ortogonal bo‘lishini talab qilinadi, bunday funksiyalar sonining yetarlicha kattaligi xatolikni o‘rtacha ma‘noda kichikligini ta‘minlaydi. Bu holatda taqribiy yechimning aniq yechimga qanchalik yaqinligi umumiy holda ochiq qolayotgan muammolardan.

Shunday qilib, C_i ($i = 1, 2, \dots, n$) koeffitsiyentlarni topish uchun

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b u_1(x) R(x, C_1, C_2, \dots, C_n) dx &= 0, \\ \int_a^b u_2(x) R(x, C_1, C_2, \dots, C_n) dx &= 0, \\ &\vdots \\ \int_a^b u_n(x) R(x, C_1, C_2, \dots, C_n) dx &= 0 \end{aligned} \right\}$$

chiziqli tenglamalar sistemasiga kelinadi, yoki, yanada to‘laroq,

$$\sum_{i=1}^n C_i \int_a^b u_i(x) L[u_i] dx = \int_a^b u_i(x) \{f(x) - L[u_0]\} dx$$

$i = 1, 2, \dots, n.$

2. Rits usuli

Rits usulini tavsiflash uchun quyidagi chiziqli chegaraviy masala yechimini ko‘rib chiqamiz:

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.1)$$

chegaraviy shartlar

$$y(0) = y(1) = 0.$$

Faraz qilamiz, $p(x) \in C^1[0, 1]$ va $(x), f(x) \in C[0, 1]$, $\delta > 0$ — o'zgarmas son, $p(x) \geq \delta$, $q(x) \geq 0$, $0 \leq x \leq 1$ bu shartlar berilgan chegaraviy masala yagona yechimga ega bo'lishi uchun zarur va yetarli.

Fizik hodisalarni tavsiflovchi ko'plab chegaraviy masalalarda bo'lgani kabi, nur tenglamasining yechimi integral minimallashtirish variatsion xossasini qanoatlantiradi. Nur tenglamasining variatsion prinsipi Rits usulini ishlab chiqishda asos bo'lib, nur tenglamasining yechimini $C_0^2[0, 1]$ dagi barcha funksiyalar bo'yicha integralni minimallashtiradigan funksiya sifatida tavsiflaydigan u funksiyalar to'plami $C^2[0, 1]$ da $u(0) = u(1) = 0$ shartlarni qanoatlantirsin.

$y(x) \in C^2[0, 1]$ funksiya

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

differensial tenglamaning yagona yechimidir, agar $y(x)$ funksiya $C^2[0, 1]$ da

$$I[u] = \int_0^1 \{p(x)[u'(x)]^2 + q(x)[u(x)]^2 - 2f(x)u(x)\} dx \quad (2.2)$$

integralni minimallashtiruvchi yagona funksiyasi bo'lsa.

Rits usuli integralni $C_0^2[0, 1]$ dagi barcha funksiyalar bo'yicha emas, balki $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ma'lum bazis funksiyalarining chiziqli birikmalaridan tashkil topgan kichikroq funksiyalar to'plami bo'yicha minimallashtirish yo'li bilan yechimni y ga yaqinlashtiradi. Bazis funksiyalari chiziqli, bog'liqsiz va

$$\varphi_i(0) = \varphi_i(1) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

shartni qanoatlantiradi.

Bazis funksiyalar birikmasini $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x)$ ko'rinishda ifodalab, (2.2) integralni minimallashtirish uchun aniq yechim $y(x)$ taqribiy yechim bilan almashtiriladi.

$$I[\varphi] = I \left[\sum_{j=1}^{n-1} c_j \varphi_j \right] = \int_0^1 \left\{ p(x) \left[\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i'(x) \right]^2 + q(x) \left[\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) \right]^2 - 2f(x) \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) \right\} dx, \quad (2.3)$$

bu yerda c_1, c_2, \dots, c_n koeffitsiyentlar aniqlanishi kerak bo'lgan noma'lumlardir.

I integral minimal bo'lishi uchun, uni c_1, c_2, \dots, c_n o'zgarmlarining funksiyasi sifatida ko'rib chiqish zarur.

$$\frac{\partial I}{\partial c_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.4)$$

(2.3) ni differensiallaymiz

$$\frac{\partial I}{\partial c_j} = \int_0^1 \left\{ 2p(x) \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) + 2q(x) \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) \varphi_j(x) - 2f(x) \varphi_j(x) \right\} dx,$$

Natijani (2.4)ga qo'yamiz

$$0 = \sum_{i=1}^n \left[\int_0^1 \{p(x) \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) + q(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x)\} dx \right] c_i - \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx, \quad (2.5)$$

(2.5) tenglama *normal tenglamadir* va undan c_1, c_2, \dots, c_n o'zgaruvchili $n \times n$ o'lchamli chiziqli sistema $Ac = b$ hosil bo'ladi. Bu yerda A simmetrik matritsaga ega.

Quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$a_{ij} = \int_0^1 [p(x) \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) + q(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x)] dx$$

$$b_i = \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx$$

Bazis funksiyalar sifatida bo'lakli-chiziqli funksiyalar to'plamini tanlaymiz. Ular haqida keyinroq batafsil ma'lumot beramiz. Bo'lakli-chiziqli funksiyalar to'plamining umumiy ko'rinishi quyidagicha:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } 0 \leq x \leq x_{i-1} \\ \frac{1}{h_{i-1}}(x - x_{i-1}), & \text{agar } x_{i-1} < x \leq x_i \\ \frac{1}{h_i}(x_{i+1} - x), & \text{agar } x_i < x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{agar } x_{i+1} < x \leq 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

har bir $i = 1, 2, \dots, n$ uchun $\varphi_i(x)$ funksiyaning hosilasi mavjud:

$$\varphi'_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } 0 \leq x \leq x_{i-1} \\ \frac{1}{h_{i-1}}, & \text{agar } x_{i-1} < x \leq x_i \\ -\frac{1}{h_i}, & \text{agar } x_i < x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{agar } x_{i+1} < x \leq 1 \end{cases} \quad (2.7)$$

Tanlangan bazis funksiya $\varphi_i(x)$ va uning hosilasi $\varphi'_i(x)$ faqat (x_{i-1}, x_{i+1}) oraliqda noldan farqli, qolgan barcha hollarda nolga teng. Faqatgina $j = i - 1, i, i + 1$ bo'lgan holdan tashqari barcha j lar uchun quyidagi tengliklar o'rinli bo'ladi:

$$\varphi_i(x)\varphi_j(x) \equiv 0 \quad \text{va} \quad \varphi'_i(x)\varphi'_j(x) \equiv 0$$

Natijada (2.6)dan hosil bo'ladigan chiziqli tenglamalar sistemasi 3×3 uch diagonalli sistemaga o'tadi. A matritsadagi dagi nolga teng bo'lmagan ifodalar:

$$a_{ii} = \int_0^1 \{p(x)[\varphi_i(x)]^2 + q(x)[\varphi_i(x)]^2\} dx = \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) dx + \left(\frac{-1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) dx + \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})^2 q(x) dx + \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)^2 q(x) dx,$$

$$a_{i,i+1} = \int_0^1 \{p(x)\varphi'_i(x)\varphi'_{i+1}(x) + q(x)\varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x)\} dx = -\left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) dx + \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)(x - x_i)q(x) dx,$$

$$a_{i,i-1} = \int_0^1 \{p(x)\varphi'_i(x)\varphi'_{i-1}(x) + q(x)\varphi_i(x)\varphi_{i-1}(x)\} dx = -\left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) dx + \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - x)(x - x_{i-1})q(x) dx,$$

$$b_i = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x) dx = \frac{1}{h_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})f(x) dx + \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)f(x) dx,$$

Bu yerda 6 xil integralni hisoblash talab etiladi:

$$Q_{1,i} = \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)(x - x_i)q(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1,$$

$$Q_{2,i} = \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})^2 q(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$Q_{3,i} = \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)^2 q(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$Q_{4,i} = \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n + 1,$$

$$Q_{5,i} = \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})f(x)dx, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$Q_{6,i} = \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)f(x)dx, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

Ac = b chiziqli sistemasidagi A matritsasi va b vektori quyidagicha:

$$a_{i,i} = Q_{4,i} + Q_{4,i+1} + Q_{2,i} + Q_{3,i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$a_{i,i+1} = -Q_{4,i+1} + Q_{1,i}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$a_{i,i-1} = -Q_{4,i} + Q_{1,i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$b_i = Q_{5,i} + Q_{6,i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

c lar noma'lum c_1, c_2, \dots, c_n ko'effitsientlar, ular orqali $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x)$ bilan berilgan Rits yaqinlashuvi tuziladi.

Ushbu usuldan foydalanish uchun to'g'ridan-to'g'ri yoki kvadratur formulasi bilan 6n ta integralni hisoblash kerak. Integral hisoblashning muqobil yondashuvi $p(x)$, $q(x)$ va $f(x)$ funksiyalarning har birini bo'lak-chiziqli interpolyatsiya qiluvchi ko'phad bilan yaqinlashtirish va keyin yaqinlashuvni integrallashdir. Masalan, $Q_{1,i}$ integralini ko'rib chiqaylik. $q(x)$ ning bo'lakli-chiziqli interpolyatsiyasi

$$P_q(x) = \sum_{i=0}^{n+1} q(x_i) \varphi_i(x),$$

bu yerda $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ (2.6) da aniqlangan va

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1}, & \text{agar } 0 \leq x \leq x_1 \\ 0, & \text{boshqa hollarda} \end{cases}$$

$$\varphi_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_n}{1 - x_n}, & \text{agar } x_n \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{boshqa hollarda.} \end{cases}$$

Integrallash oralig'i $[x_i, x_{i+1}]$ ga teng, shuning uchun $P_q(x)$ bo'lakli ko'phadga kamayadi.

$$P_q(x) = q(x_i) \varphi_i(x) + q(x_{i+1}) \varphi_{i+1}(x)$$

$$Q_{1,i} = \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)(x - x_i)q(x)dx$$

$$\approx \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)(x - x_i) \left[\frac{q(x_i)(x_{i+1} - x)}{h_i} + \frac{q(x_{i+1})(x - x_i)}{h_i} \right] dx$$

$$= \frac{h_i}{12} [q(x_i) + q(x_{i+1})].$$

Bundan tashqari, agar $q(x) \in C^2[x_i, x_{i+1}]$ bo'lsa, u holda

$$\left| Q_{1,i} - \frac{h_i}{12} [q(x_i) + q(x_{i+1})] \right| = O(h_i^3).$$

Boshqa integrallarga yaqinlashishlar ham xuddi shunday tarzda chiqariladi:

$$Q_{2,i} \approx \frac{h_{i-1}}{12} [3q(x_i) + q(x_{i-1})], \quad Q_{3,i} \approx \frac{h_i}{12} [3q(x_i) + q(x_{i+1})],$$

$$Q_{4,i} \approx \frac{h_{i-1}}{2} [p(x_i) + p(x_{i-1})], \quad Q_{5,i} \approx \frac{h_{i-1}}{6} [2f(x_i) + f(x_{i-1})]$$

$$Q_{6,i} \approx \frac{h_i}{6} [2f(x_i) + f(x_{i+1})].$$

Natijalar.

1-masala:

$$y'' + xy' + y = 2x$$

differensial tenglamaning

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 0$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi taqribiy yechimini Galerkin usulidan foydalanib toping.

Yechish:

$u_i(x)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) bazis funksiyalar sistemasi sifatida quyidagi funksiyalarni tanlaymiz:

$$u_0(x) = 1 - x, \quad u_1(x) = x(1 - x),$$

$$u_3(x) = x^2(1-x), \quad u_4(x) = x^3(1-x),$$

Masalaning taqribiy yechimini quyidagi ko'phad ko'rinishida izlaymiz

$$y = (1-x) + C_1x(1-x) + C_2x^2(1-x) + C_3x^3(1-x).$$

y ni berilgan differensial tenglamaning chap tomoniga qo'yib

$$R(x, C_1, C_2, C_3) = (1-4x) + C_1(-2+2x+3x^2) + C_2(2-6x+3x^2+4x^3) + C_3(6x-12x^2+4x^3-5x^4)$$

xatolikni olamiz.

R funksiyaning $u_1(x), u_2(x), u_3(x)$ funksiyalarga ortogonallik shartlari quyidagi sistemaga olib keladi:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 (x-x^2)R(x, C_1, C_2, C_3)dx &= 0, \\ \int_0^1 (x^2-x^3)R(x, C_1, C_2, C_3)dx &= 0, \\ \int_0^1 (x^3-x^4)R(x, C_1, C_2, C_3)dx &= 0, \end{aligned} \right\}$$

$R(x)$ ning o'rniga uning qiymatini qo'yib, mos integrallashdan keyin

$$\left. \begin{aligned} 133C_1 + 63C_2 + 36C_3 &= -70, \\ 140C_1 + 108C_2 + 79C_3 &= -98 \\ 264C_1 + 252C_2 + 211C_3 &= -210 \end{aligned} \right\}$$

sistemani olamiz. Bu yerdan $C_1 = -0.2090$; $C_2 = -0.7894$; $C_3 = 0.2090$ ni topamiz va demak,
 $y = (1-x)(1 - 0.2090x - 0.7894x^2 + 0.2090x^3).$

2-masala: Quyidagi chegaraviy masalani Ritz usuli asosida ko'rib chiqamiz:

$$\begin{aligned} -y'' + \pi^2 y &= 2\pi^2 \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) &= y(1) = 0 \end{aligned}$$

$h_i = h = 0.1$ deb oladigan bo'lsak, har bir $i = 0, 1, \dots, 9$ uchun $x_i = 0.1i$ o'rinli bo'ladi.

Mos qiymatlarni qo'yib integrallarni hisoblaymiz:

$$Q_{1,i} = 100 \int_{0.1i}^{0.1i+0.1} (0.1i + 0.1 - x)(x - 0.1i)\pi^2 dx = \frac{\pi^2}{60},$$

$$Q_{2,i} = 100 \int_{0.1i-0.1}^{0.1i} (x - 0.1i + 0.1)^2 \pi^2 dx = \frac{\pi^2}{30},$$

$$Q_{3,i} = 100 \int_{0.1i}^{0.1i+0.1} (0.1i + 0.1 - x)^2 \pi^2 dx = \frac{\pi^2}{30},$$

$$Q_{4,i} = 100 \int_{0.1i-0.1}^{0.1i} dx = 10,$$

$$Q_{5,i} = 10 \int_{0.1i-0.1}^{0.1i} (x - 0.1i + 0.1)2\pi^2 \sin \pi x dx = -2\pi \cos 0.1\pi i + 20[\sin(0.1\pi i) - \sin((0.1i - 0.1)\pi)],$$

$$\begin{aligned} Q_{6,i} &= 10 \int_{0.1i}^{0.1i+0.1} (0.1i + 0.1 - x)2\pi^2 \sin \pi x dx = \\ &= 2\pi \cos 0.1\pi i - 20[\sin((0.1i + 0.1)\pi) - \sin(0.1\pi i)]. \end{aligned}$$

$Ac = b$ chiziqli sistema

$$a_{i,i} = 20 + \frac{\pi^2}{15}, \quad i = 1, 2, \dots, 9,$$

$$a_{i,i+1} = -10 + \frac{\pi^2}{60}, \quad i = 1, 2, \dots, 8,$$

$$a_{i,i-1} = -10 + \frac{\pi^2}{60}, \quad i = 2, 3, \dots, 9,$$

va

$$b_i = 40 \sin(0.1\pi i)[1 - \cos 0.1\pi], \quad i = 1, 2, \dots, 9.$$

Uch diagonalli chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi:

$$c_9 = 0.3102866742, \quad c_8 = 0.5902003271, \quad c_7 = 0.8123410598,$$

$$c_6 = 0.9549641896, \quad c_5 = 1.0041087710, \quad c_4 = 0.9549641893,$$

$$c_3 = 0.8123410598, \quad c_2 = 0.5902003271, \quad c_1 = 0.3102866742,$$

Berilgan chegaraviy masalaning taqribiy yechimi $\varphi(x) = \sum_{i=1}^9 c_i \varphi_i(x)$

va haqiqiy yechimi $y(x) = \sin \pi x$. 1-jadvalda har bir $i = 1, 2, \dots, 9$ dagi x_i lar uchun taqribiy yechim, aniq yechim va ular orasidagi xatolik qiymatlari keltirilgan.

1-jadval.

Taqribiy yechim, aniq yechim va ular orasidagi xatolik qiymatlari.

	x_i	$\varphi(x_i)$	$y(x_i)$	$ \varphi(x_i) - y(x_i) $
1	0.1	0.3102866742	0.3090169943	0.00127
2	0.2	0.5902003271	0.5877852522	0.00241
3	0.3	0.8123410598	0.8090169943	0.00332
4	0.4	0.9549641896	0.9510565162	0.00390
5	0.5	1.0041087710	1.0000000000	0.00411
6	0.6	0.9549641893	0.9510565162	0.00390
7	0.7	0.8123410598	0.8090169943	0.00332
8	0.8	0.5902003271	0.5877852522	0.00241
9	0.9	0.3102866742	0.3090169943	0.00127

Xulosa. Ko‘p masalalar uchun Rits va Galerkin usullari nazariy jihatdan ekvivalentdir. Rits usuli eng qadimgi usullardan biri bo‘lib, muvaffaqiyatli usullardan biri ekanligi o‘z isbotini topgan. Rits usuli minimallashtirish formasi va optimallashtirishga asoslangan texnikadan foydalanib, masalani yechishi mumkin. Galerkin usuli odatda Rits usuliga qaraganda kuchsizroq talablarga ega. Har bir masalaning minimallashtiruvchi formasi mavjud emas, holbuki, deyarli barcha masalalar qandaydir kuchsiz shaklga ega. Tegishli kuchsiz formani qanday tanlash va har xil usullarning yaqinlashuvi chekli elementlar usullari uchun muhim masaladir.

ADABIYOTLAR:

1. Burden R.L, Douglas F.J. *Numerical Analysis. 10th edition, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2016*
2. Zhilin Li, Zhonghua Qiao, Tao Tang *Numerical solution of differential equations. Cambridge University Press, 2018, DOI: 10.1017/9781316678725*
3. Самарский А.А, *Введение и численные методы. М.: Наука, 1987.*
4. Imomova Shafolat Mahmudovna. *Matematikani o‘qitishda matematik tizimlardan foydalanish//Pedagogik mahorat. Maxsus son(2022-yil, dekabr),2022, C.77-80.*
5. Imomova Shafolat Mahmudovna, Mardonova Maftunabonu Abrorovna. *Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning aniq usullari va tadbiqlari// Educational Research in Universal Sciences. VOLUME 3 | SPECIAL ISSUE 2 | 2024, C.397-404*
6. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. *Численные методы. –М.: Физматлит, 2004. - 400 с.*