

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ПЛАСТИНКЕ
МЕТОДОМ ЛОКАЛЬНО-ОДНОРОДНОЙ СХЕМЫ**

Жумаев Жура

доцент,
Бухарский государственный университет,
Республика Узбекистан, г. Бухара
E-mail: j.jumayev@buxdu.uz

Фатиллоева Мавлуда Нуруллоевна

магистрант,
Бухарский государственный университет,
Республика Узбекистан, г. Бухара

Шамсиддинова Мафтун Улугбековна

студент,
Бухарский государственный университет,
Республика Узбекистан, г. Бухара

**SOLUTION OF THE PROBLEM OF THERMAL CONDUCTION
ON A PLATE BY THE METHOD OF A LOCALLY HOMOGENEOUS SCHEME**

Jura Jumayev

Associate Professor,
Bukhara State University,
Republic of Uzbekistan, Bukhara

Mavluda Fatilloeva

Master's student,
Bukhara State University,
Republic of Uzbekistan, Bukhara

Maftuna Shamsiddinova

Student,
Bukhara State University,
Republic of Uzbekistan, Bukhara

АННОТАЦИЯ

Численно решена задача теплопроводности на квадратной пластинке с теплофизическими характеристиками с использованием первого и второго типов граничных условий. Для численного решения была выбрана локально одномерная схема А.А. Самарского. Для апробации авторами рассмотрены задачи распространения температуры в стальной и медной пластинках, а также произведен процесс их сравнения между собой. Используя алгоритм задачи, составлена программа на языке Паскаль, графики получены с применением математического пакета MathCAD.

ABSTRACT

The thermal conductivity problem on a square plate with thermophysical characteristics was solved numerically using the first and second types of boundary conditions. For the numerical solution, the locally one-dimensional scheme of A.A. Samarskiy was chosen. For testing, the problems of temperature propagation in steel and copper plates were considered and compared with each other. Using the algorithm of the problem, a program was compiled in the Paskal language, the graphs were obtained using the MathCAD mathematical package.

Ключевые слова: теплопроводность, граничные условия, численное решение, локально-одномерная схема, метод прогонки.

Keywords: thermal conductivity, boundary conditions, numerical solution, locally one-dimensional scheme, sweep method.

Введение. Задачи о распределении температуры в прямоугольной пластине, которая имеет разные теплофизические характеристики, возникают при решении многих проблем, связанных с прочностью различных конструкций в радиотехнике, в которых используются такие и подобные им элементы. Разогревание пластины может происходить за счет потоков через границы, источников с внутренним подогревом. Поэтому изучение и решение таких задач привлекает все большее внимание специалистов [1-6].

В настоящем исследовании, используя локально-однородную схему А.А. Самарского, решена задача теплопроводности на пластине с различными граничными условиями.

Метод. Рассмотрим процесс распространения тепла на квадратной пластинке с размерами сторон $L = H = 0,5 \text{ м}$.

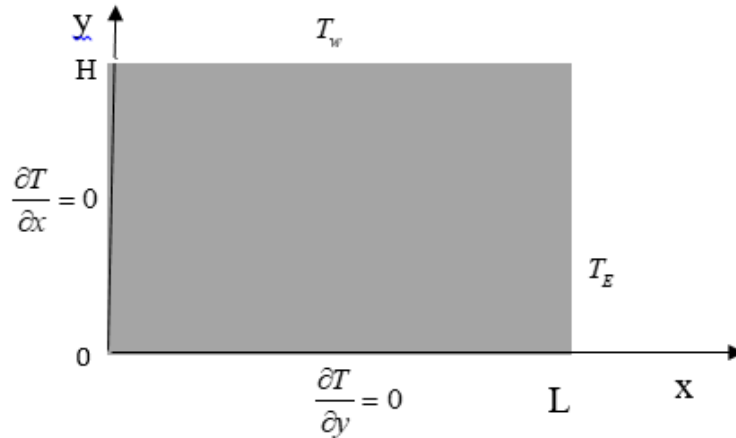


Рисунок 1. Объект исследования

Уравнение теплопроводности для двумерного случая имеет вид [7]:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

В соответствии с постановкой задачи сформулируем начальные и граничные условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} t = 0 : T = T_0, 0 < x < L, 0 < y < H; \\ 0 < x < L, y = 0 : \frac{\partial T}{\partial x} = 0, t > 0; \\ 0 < x < L, y = H : T = T_w, t > 0; \\ 0 < y < H, x = 0 : \frac{\partial T}{\partial y} = 0, t > 0; \\ 0 < y < H, x = L : T = T_E, t > 0; \end{array} \right. \quad (2)$$

Для численного решения уравнения (1) введем пространственно-временную сетку с координатами:

$$x_i = (i-1) \cdot h_x, \quad y_j = (j-1) \cdot h_y, \quad t_n = n \cdot \tau, \quad (3)$$

где h_x, h_y – шаги сетки по координатам x, y соответственно; τ – шаг по времени; $i = \overline{1, N_x}; j = \overline{1, N_y}; n = \overline{0, K}$ – границы изменения индексов.

Введем следующее обозначение:

$$\begin{aligned} T(x_i, y_j, t_n) &= T_{i,j}^n, \quad i = \overline{1, N_x}; \\ &j = \overline{1, N_y}; \quad n = \overline{0, K}. \end{aligned} \quad (4)$$

Основываясь на пространственно-временной сетке (3) и обозначения (4) дискретизацию уравнения (1) расчеты будем проводить на основе локально-одномерной схемы А.А. Самарского [8], которая является абсолютно устойчивой и обладает свойством суммарной аппроксимации. Сущность такого подхода состоит в том, что шаг по времени реализуется в два этапа. На промежуточном временном шаге проводим дискретизацию двумерного уравнения (1) только в направлении оси x и получаем одномерное уравнение. После его решения проводим вновь дискретизацию уравнения (1), но уже в направлении оси y , решая полученное одномерное уравнение, определяем поле температуры на целом шаге по времени.

Тогда промежуточный временной шаг в направлении x следующий временной шаг по оси y выглядит так:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^n}{\tau} = \lambda \cdot \left(\frac{T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2 \cdot T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} \right), \quad (5)$$

$$\rho \cdot c \cdot \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \lambda \cdot \left(\frac{T_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2 \cdot T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + T_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h_y^2} \right), \quad (6)$$

Теперь вышеприведенные уравнения являются одномерными. Сначала будем решать уравнение (5), используя метод прогонки с начальными и граничными условиями (2), после чего, используя вычисленное поле в качестве начального условия, будем решать уравнение (6), подобно решению уравнения (5) [7-8].

Результаты решения задач (5)-(6) выводились в файл и приводятся в виде графиков [9-10].

На рисунке 2 приведено распределение температуры на пластине, когда граничные значения температуры по периметру пластины имеют значение 50°C ,

а внутри периметра по площади пластины – значение 5°C , в качестве начального условия, после трех минут. Пока симметричного условия не наблюдается. Материал пластинки – железо (рис. 2а) с параметрами $\lambda = 78 \text{ Вт} / (\text{м} \cdot ^{\circ}\text{C})$, $\rho = 7800 \text{ кг} / \text{м}^3$, $c = 460 \text{ Дж} / (\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C})$, и медь (рис. 2б) с параметрами $\lambda = 384 \text{ Вт} / (\text{м} \cdot ^{\circ}\text{C})$, $\rho = 7800 \text{ кг} / \text{м}^3$, $c = 460 \text{ Дж} / (\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C})$ [11]. Длина стороны квадрата 0,5 м.

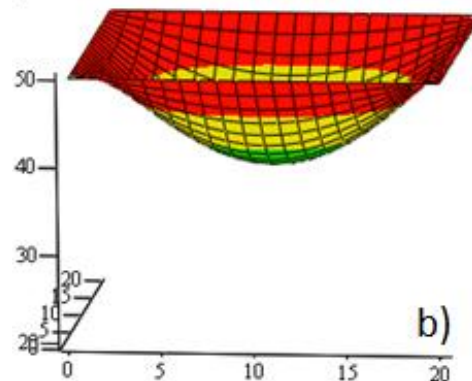
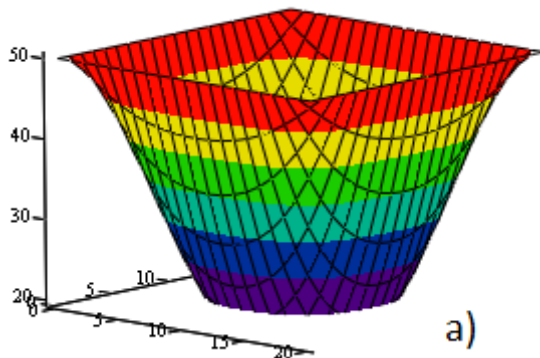


Рисунок 2. Распределение температуры на железной(а), и на медной пластине после трех минут

Как видим из рисунка, температура в медной пластинке повышается быстрее, чем в железной пластинке.

На рисунке 3 приведены изменения температуры по времени на пластине, когда на двух сторонах поддерживается симметричное условие.

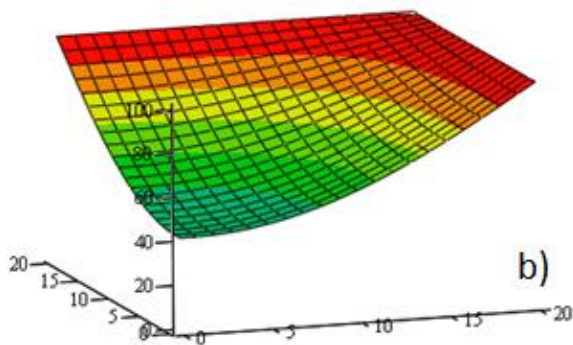
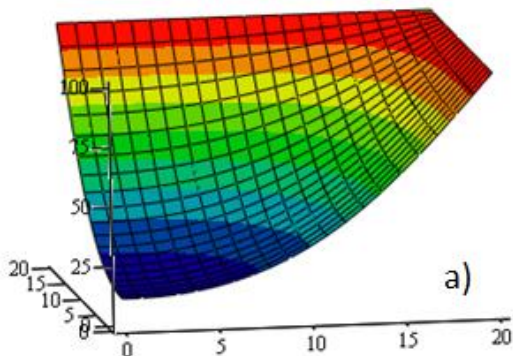


Рисунок 3. Распределение температуры на железной пластине после 20 минут (а) и после 40 минут (б) при симметричных условиях на двух сторонах

Заключение. На основе локально одномерной схемы А.А. Самарского решена задача распределения температуры на пластинке с использованием граничных условий, когда на двух сторонах поддерживается постоянная температура, а на двух других

поставлен ее симметричный аналог. Сопоставлены изменения температуры для разных материалов пластинки. Составленным алгоритмом и программой можно пользоваться при решении практических задач.

Список литературы:

1. Бейбалиев В.Д., Шабанова М.Р. Численный метод решения краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности с производными дробного порядка // Вестник Самарского гос. техн. ун-та: Серия «Физико-математические науки. – 2010. – № 5 (21). – С. 244–251.
2. Дьяконов В.Г., Лонцаков О.А. Основы теплопередачи: учеб. пособие. – Казань: КНИТУ, 2011. – 230 с.
3. Жумаев Ж. Решение математических задач в пакетах математических программ: учеб. пособие. – Бухара: «Дурдона», 2020. – 240 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://uniwork.buxdu.uz/resurs/13227_2_D84564EDB490F3D0421C50F064AACE32C739DAB1.pdf (дата обращения 28.03.2024).
4. Жумаев Ж., Тошева М.М. Моделирование стационарной теплопроводности при свободной конвекции в ограниченном объеме // Universum. Технические науки. – Вып. 4 (97). – 2022. – Ч. 3. – С. 34–38. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://7universum.com/ru/tech/archive/category/497> (дата обращения 23.03.2024).
5. Логинов В.С. Теплообмен в пластине при действии внутренних источников тепла при малых числах Фурье ($Fo < 0,001$) // Известия Томского политехн. ун-та. – 2003. – Т. 306. – № 2. – С. 40–41.
6. Назаров С.А., Свирс Г.Х., Слуцкий А.С. Задача теплопроводности для тонкой пластины с контрастными стержневыми включениями // Вестник СПбГУ. – Сер. 1. – 2009. – Вып. 4. – С. 44–54.
7. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Разностные методы решения задач теплопроводности: учеб. пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2007. – 172 с.
8. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
9. Чернышов А.Д., Горяйнов В.В., Марченко А.Н. Исследование температурных полей в прямоугольной пластине с внутренним источником, зависящим от температуры, при помощи быстрых разложений // Теплофизика и аэромеханика, 2016. – Т. 23. – № 2. – С. 247–256.
10. Чиркин В.С. Теплофизические свойства материалов. Справочник. – М.: ФИЗМАТГИЗ., 1959. – 356 с.
11. Jumayev J., Qodirov J., Mirzaev Sh.M. Simulation of natural convection in a solar collector // Journal of Physics: Conference Series. – 2023. – 2573 012024. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/2573/1/012024> (дата обращения 22.03.2024).