ISSN 2181-6833

9 772181 683301

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

1930

ISSN 2181-6833

PEDAGOGIK MAHORAT

11
2023

ISSN 2181-6883

PEDAGOGIK MAHORAT

Ilmiy-nazariy va metodik jurnal

11-son (2023-yil, dekabr)

Jurnal 2001-yildan chiqa boshlagan

Buxoro – 2023

PEDAGOGIK MAHORAT

Ilmiy-nazariy va metodik jurnal
2023, № 1

Jurnal O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi OAK Rayosatining 2016-yil 29-dekabrdagi qarori bilan **pedagogika** va **psixologiya** fanlari bo‘yicha dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo‘lgan zaruriy nashrlar ro‘yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2001-yilda tashkil etilgan.
Jurnal 1 yilda 12 marta chiqadi.

Jurnal O‘zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2016-yil 22-fevral № 05-072-sonli guvohnoma bilan ro‘yxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti

Tahririyat manzili: 200117, O‘zbekiston Respublikasi,Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko‘chasi, 11-uy
Elektron manzil: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ МАСТЕРСТВО
Научно-теоретический и методический журнал
№ 11, 2023

Решением Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан от 29 декабря 2016 года журнал включён в перечень изданий, рекомендованных для публикации научных результатов статей по направлениям «**Педагогика»** и «**Психология»**.

Журнал основан в 2001 году.
Журнал выходит 12 раз в год.

Журнал зарегистрирован Бухарским управлением агентства по печати и массовой коммуникации Узбекистана.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации № 05-072 от 22 февраля 2016 г.

Учредитель: Бухарский государственный университет

Адрес редакции: 200117, Узбекистан, г. Бухара, ул. Мухаммад Икбол, 11.
E-mail: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

PEDAGOGICAL SKILLS
The scientific-theoretical and methodical journal
№ 11, 2023

By the decision of the Higher Attestation Commission under the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan dated December 29, 2016, the journal was included in the list of publications recommended for publishing scientific results of articles in the areas of «**Pedagogy**» and «**Psychology**».

The journal was founded in 2001.
The journal is published 12 times a year.

The journal is registered by the Bukhara Department of the Agency for Press and Mass Communication of Uzbekistan.

The certificate of registration of mass media № 05-072 of 22 February 2016

Founder: Bukhara State University

Publish house: 200117, Uzbekistan, Bukhara, Muhammad Ikbol Str., 11.
E-mail: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

MUNDARIJA

FUNKSIONAL TENGLAMALAR YECHISHNING AYRIM METODLARI

Xayitova X.G‘.,
Buxoro davlat universiteti “Matematik analiz” kafedrasi o‘qituvchisi,
xilola_xayitova@mail.ru,
x.g.xayitova@buxdu.uz,
Qo‘shmurodova Z.B.,
Buxoro davlat universiteti matematika ta’lim yo‘nalishi 4-bosqich talabasi

Maktab matematika fani o‘qituvchisini tayyorlashda ularning matematik tushunchalardan mohirona foydalanish ko‘nikmasini shakllantirish muhim hisoblanadi. Biroq ayrim matematik tushunchalar, masalan, funksional tenglamalar tushunchasi maktab matematika kursida o‘z nomi bilan ishlatilmaydi. Shu sababli bo‘lajak matematika fani o‘qituvchilari Matematik praktikum darslarida yoki malaka oshirish kurslari davomida funksional tenglamalar va ularni yechish usullari bo‘yicha bilim, ko‘nikma va malakalarga ega bo‘lishi talab etiladi. Mazkur maqolada matematika fani o‘qituvchilariga shu yo‘nalishda xizmat qiluvchi manbalar yoritilgan bo‘lib, tenglamalar yechishning ayrim metodlariga to‘xtalib o‘tilgan hamda bilim oluvchilarga qulaylik yaratuvchi yechimlar yoritilgan. Misollardan namunaviy yechimlar keltirilgan va yechish metodlari izohlangan.

Kalit so‘zlar: *funksional tenglama, yechim, parametr, inyekiv funksiya, metod, chiziqli funksiya, koeffitsiyent.*

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Важно формировать навыки умелого использования математических понятий при подготовке школьных учителей математики. Однако некоторые математические понятия, например понятие функциональных уравнений, в школьном курсе математики не используются под своим названием. По этой причине будущие учителя математики обязаны приобретать знания, навыки и умения по функциональным уравнениям и методам их решения на математических практикумах или курсах повышения квалификации. В данной статье выделены ресурсы, которые служат учителям математики в этом направлении, затронуты некоторые методы решения уравнений и выделены решения, которые сделают обучение удобным для учащихся. Примеры решений представлены на примерах и объяснены методы решения.

Ключевые слова: *Функциональное уравнение, решение, параметр, инъективная функция, метод, линейная функция, коэффициент.*

SOME METHODS FOR SOLVING FUNCTIONAL EQUATIONS

It is important to develop skills in the skillful use of mathematical concepts when preparing school mathematics teachers. However, some mathematical concepts, for example the concept of functional equations, are not used by their name in the school mathematics course. For this reason, future mathematics teachers are required to acquire knowledge, skills and abilities on functional equations and methods for solving them at mathematical workshops or advanced training courses. This article highlights resources that serve mathematics teachers in this area, touches on some methods for solving equations, and highlights solutions that will make learning convenient for students. Sample solutions are presented with examples and solution methods are explained.

Key words: *Functional equation, solution, parameter, injective function, method, linear function, coefficient.*

Kirish. Parametrli tenglamalar-eng sodda funksional tenglamalar bo‘lib, unda noma'lum funksiya bir yoki bir nechta sonli parametrlar orqali ifodalanadi (bu kabi funksiyalarning eng sodda va eng keng tarqalgan misoli ko‘phadlardir). Ushbu holda, funksiyaning yechimini topish muammosi ushbu raqamli parametrlarning qiymatlarini aniqlashdan iborat bo‘ladi.

$\mathbf{1-\textit{misol}}$. Quyidagi

$$2f(x+2)+f(4-x)=2x+7 \qquad (1)$$

tenglikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $y=f(x)$ chiziqli funksiya mavjudmi?

Asosiy qism. Ta'rifga ko'ra, chiziqli funksiya $f\,(x) = kx + b$ sifatida ifodalanadigan funksiyadir. k va b sonli parametrlari chiziqli funksiyani o‘ziga xos tarzda ifodalaydi, chunki x o‘zgaruvchining barcha qiymatlari uchun $k_1x + b_1 = k_2x + b_2$ hamda $k_1 = k_2$, $b_1 = b_2$ tengliklar o‘zaro teng kuchli hisoblandi. Bundan kelib chiqib, quyidagi tasdiqni qo‘llaymiz:

Ikki ko‘phad bir xil darajada teng, agar o‘zgaruvchining koeffitsiyentlari bir xil darajalarida teng bo‘lsa (xususan, ko‘phadlarning darajalari ham mos keladigan bo‘lsa).

Shuning uchun bizning misolimiz quyidagicha isloh qilinishi mumkin:

Barcha x lar uchun

$$2\,(k\,(x + 2) + b) + (k\,(4 - x) + b) = 2x + 7 \qquad (2)$$

tenglikni qanoatlantiradigan k va b sonlari mavjudmi?

Qavslarni ochib, o‘xshash hadlarni ixchamlab, (2) tenglamani quyidagi shaklga keltiramiz:

$$kx + 8k + 3b = 2x + 7$$

barcha x lar uchun. Bir xil darajadagi o‘zgaruvchilarning koeffitsiyentlarni tenglashtirsak, biz misolni o‘zgartiramiz:

Ushbu tengliklarni qanoatlantiradigan k va b sonlari mavjudmi

$$\begin{cases} k = 2 \\ 8k + 3b = 7 \end{cases} \qquad (3)$$

Ushbu shaklda misolimiz shunchaki (3) sistemaning mosligi masalasiga keladi. Ushbu sistema yagona yechimiga ega ekanligini ko‘rish oson $k = 2, b = -3$. Demak, yuqoridagi funksional tenglamani qanoatlantiradigan yagona $f\,(x) = 2x - 3$ chiziqli funksiya mavjud ekanligini ko‘rish mumkin.

Oddiy tenglamalarga kelsak, noma'lum had songa teng bo‘lganda, funksional tenglamada umuman yechimlar bo‘lmaydi yoki cheksiz yechimlar to‘plami bo‘lgan holatlar mavjud. Keling, ushbu holatlarni ikkita misol bilan tushuntirib beramiz.

$\boldsymbol{2 - misol}$. x ning barcha qiymatlarida

$$f\,(x + 3) - f\,(2 - x) = 3x + 1 \qquad (4)$$

tenglikni qanoatlantiradigan $y = f(x)$ chiziqli funksiya mavjudmi?

1-misolni yechishda bo‘lgani kabi, quyidagicha qayta tuzish mumkin:

Ushbu tengliklarni qanoatlantiradigan k va b sonlari mavjudmi?

$$\begin{cases} 2k = 3, \\ k = 1 \end{cases}$$

Ushbu sistema aniq bir-biriga zid. Shunga ko‘ra, funksional tenglama chiziqli funksiyalar sinfida echimga ega emas.

$\boldsymbol{3 - misol}$. x ning barcha qiymatlarida

$$f(1 - x) - f(2 - x) = -2x + 7 \qquad (5)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi $y = f(x)$ kvadratik funksiyani toping.

Ta'rifga ko‘ra, kvadratik funksiya

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

ko‘rinishda ifodalanishi mumkin bo‘lgan funksiyadir. Shuning uchun bizning misolimizni quyidagi ko‘rinishda qayta tuzishimiz mumkin:

Shunday $a \neq 0, va$ c sonlarni topingki, x ning barcha qiymatlarida

$$(a(1 - x)^2 + b(1 - x) + c) - (a(2 - x)^2 + b(2 - x) + c) = -2x + 7$$

$$2ax - (3a + b) = -2x + 7.$$

Ikki polinom bir xil darajada teng bo‘lganligi sababli, o‘zgaruvchining koeffitsientlari bir xil darajalarida teng bo‘lsa, misol quyidagi shaklga ega bo‘ladi:

Quyidagi tengliklarni qanoatlantiradigan $a \neq 0$, b va c sonlarni toping

$$\begin{cases} 2a = -2 \\ -3a - b = 7. \end{cases} \qquad (6)$$

Aks holda (6) sistemani yechishimiz kerak bo‘ladi.

Agar bu sistema ikki noma'lum a va b qatnashgan sistema sifatida qaralsa, unda u yagona yechimga ega bo‘ladi $a = -1, b = -4$. Biroq, ushbu sistema bevosita boshqa noma'lum c parametrni o‘z ichiga oladi. c ga shartlar qo‘yilmaganligi sababli, bu noma'lum ixtiyoriy haqiqiy qiymatga ega bo‘lishi mumkin. Shunday qilib, (6) sistema $(a; b; c) = (-1; -4; c)$ shakldagi cheksiz ko‘p yechimlarga ega, bu erda $c \in R$. Shunga ko‘ra, funksional tenglama kvadratik funksiyalar sinfida cheksiz ko‘p yechimlarga ega. Ushbu yechimlarning barchasi $f\,(x) = -x^2 - 4x + c$ tenglik bilan tavsiflanishi mumkin, bu erda c- ixtiyoriy o‘zgarmas son.

Keyingi misolda, ma'lum bir funksiya sinfidagi funksional tenglamani yechish talab qilinadi (n darajadagi ko‘phadlar), lekin tenglamaning o‘zi ilgari muhokama qilinganlarga qaraganda ancha murakkab.

$\boldsymbol{4-misol}$. $n-$ darajadagi barcha ko‘phadlarni toping ya'ni $a_n \neq 0$ koeffitsienti bilan:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$P(x^2) = (P(x))^2, x \in (-\infty; +\infty). \tag{7}$$

Ushbu misolni ishlashimiz uchun biz $P(x)$ ni $Q(x) + a_n x^n$ shaklida ifodalaymiz, bu erda $Q(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

Biz $Q(x)$ ko‘phadning darajasini bilmaymiz, chunki uning koeffitsientlarining ba'zilari (yoki barchasi) 0 ga teng bo‘lishi mumkin. Lekin $Q(x)$ ko‘phad darajasi $(n-1)$ dan oshmaydi. Ushbu darajani k bilan belgilaymiz, $Q(x)$ ko‘phadning koeffitsientlaridan kamida bittasi 0 ga teng emas deb qabul qilamiz. Keyin (7) ayniyat quyidagi shaklga keladi.

$$Q(x^2) + a_n x^{2n} = (Q(x))^2 + 2a_n x^n Q(x) + a_n^2 x^{2n}, \qquad x \in (-\infty; +\infty). \tag{8}$$

Ikki ko‘phad bir xil darajada teng, agar koeffitsientlar o‘zgaruvchining bir xil darajalarida teng bo‘lsa (xususan, ko‘phadning darajalari ham mos keladigan bo‘lsa).

$Q(x^2)$ ko‘phadining darajasi $2k$ ga teng, $(Q(x^2))$ ko‘phadining darajasi $2k$, $2a_n x^n Q(x)$ ko‘phadining darajasi $n+k$ ga teng. Shuning uchun (8) tenglamadagi $2n$ daraja shartlari faqat $a_n x^{2n}$ (chap tomonda) va $a_n^2 x^{2n}$ (o‘ng tomonda) va shuning uchun $a_n = a_n^2$ va $a \neq 0$. Bu bizga (8) tenglikni quyidagicha ifodalashga imkon beradi:

$$Q(x^2) = \left(Q(x)\right)^2 + 2x^n Q(x), \qquad x \in (-\infty; +\infty).$$

Yuqorida aytib o‘tganimizdek, $Q(x^2)$ ko‘phad darajasi $2k$, $(Q(x))^2$ ko‘phad darajasi $2a_n x^n Q(x)$ ko‘phadning darajasi $n+k$, $k < n$ bo‘lgani uchun, o‘ngdagi ko‘phadning darajasi chap tomondagi ko‘phad darajasidan kattaroq bo‘lishi mumkin emas.

Ammo bu dalillar $Q(x)$ ko‘phadining koeffitsientlaridan kamida bittasi 0 ga teng emas degan taxminga asoslandi. Agar $Q(x)$ ko‘phadning barcha koeffitsientlari 0 ga teng bo‘lsa, u holda $Q(x) \equiv 0$ bo‘ladi. Shunda yuqorodagi tenglik

$$a_n x^{2n} = a_n^2 x^{2n}, \qquad x \in (-\infty; +\infty),$$

shaklini oladi, va $a_n = 1$ tenglik o‘rinlidir.

Demak, n darajali ko‘phadlar sinfidagi (7) funksional tenglamaning yagona yechimi $P(x) = x^n$ dir.

1-masalaga kelsak, asl funksional tenglamani (1) umumiy shaklda qanoatlantiradigan boshqa funksiyalar mavjudmi $f(x)$ (albatta chiziqli emas). Bu savolga javob berish uchun (1) funksional tenglamani umumiy shaklda izlaymiz.

Buning uchun dastlab, x ni $x-2$ bilan almashtiramiz (tenglamada $f(x)$ ifoda paydo bo‘lishi uchun). Keyin (1) tenglama shaklga ega bo‘ladi

$$2f(x) + f(6-x) = 2x + 3 \tag{9}$$

barcha x uchun.

Ushbu tenglikni ikkita noma'lum $A = f(x)$ va $B = f(6-x)$ uchun oddiy tenglama deb hisoblash mumkin, o‘zgaruvchisi x. Bu holda parametr quyidagi rollarni o‘ynaydi:

$$2A + B = 2x + 3.$$

Bizda ikkita noma'lum miqdor mavjud bo‘lganligi sababli, biz A va B uchun yana bitta tenglamani izlaymiz, buning uchun (9) x tenglikni $6-x$ ga almashtiramiz (axir bu x ning barcha qiymatlari uchun to‘g‘ri keladi , shuning uchun x o‘zgaruvchi o‘rniga har qanday sonni yoki ifodani qo‘yishingiz mumkin):

Barcha x uchun

$$2f(6-x) + f(x) = -2x + 15.$$
$$A = f(x) \text{ va } B = f(6-x)$$

o‘zgaruvchilar nuqtayi nazaridan bu tenglik shuni anglatadi

$$2B + A = -2x + 15.$$

Shunday qilib, quyidagi sistema kelib chiqadi:

$$\begin{cases} 2A + B = 2x + 3, \\ 2B + A = -2x + 15 \end{cases}$$

Ushbu tengliklardan $B = f(6-x)$ ni chiqarib tashlaymiz

$$A = f(x) = 2x - 3.$$

(9) funksional tenglamani yechish uchun tavsiflangan usul chekli sonli ildizlarga ega - bu ikkita funksiya to‘plami

$$\varphi_0(x) = x, \;\; \varphi_1(x) = 6 - q$$

ga nisbatan yopiq bo‘lishi bilan bog‘liq. Ushbu to‘plamdan istalgan ikkita funksiya yig‘indisi ushbu to'plamda kiruvchi boshqa funksiyani ifodalaydi. Darhaqiqat, buni tekshirish oson

$$\varphi_0(\varphi_0(x)) = \varphi_0(x),$$

$\varphi_0(\varphi_1(x)) = \varphi_1(x)$,
$\varphi_1(\varphi_0(x)) = \varphi_1(x)$,
$\varphi_1(\varphi_1(x)) = \varphi_0(x)$.

Zamonaviy algebra nazariyasidan foydalanib, $\varphi_0(x) = x$ va $\varphi_1(x) = 6 - x$ funksiyalar guruhni tashkil qiladi deb aytishimiz mumkin. Guruh tushunchasi zamonaviy matematikaning eng asosiy tushunchalaridan biri bo‘lib, turli xil qo‘llanmalarda keng qo‘llaniladi.

Shunga o‘xshash mulohazalar shuni ko‘rsatadiki (4) tenglama butun sonlar qatorida aniqlangan funksiyalar sinfida yechimga ega emas. Bundan tashqari, har qanday $f(x)$ funksiya x_1, x_2 ikki xil son uchun bir vaqtning o‘zida (4) tenglamani qanoatlantira olmaydi.

Demak, ushbu xulosa sistemaning mos kelmasligini anglatadi

$$\begin{cases} f(x_1+3) - f(2-x_1) = 3x_1 + 1, \\ f(x_2+3) - f(2-x_2) = 3x_2 + 1. \end{cases}$$

1 nuqtaga nisbatan x_1 va x_2 ning simmetriyasi $-\frac{1}{2}$ demak, $x_1 + x_2 = -1$, ushbu sistemani qayta yozish mumkin

$$\begin{cases} f(x_1+3) - f(2-x_1) = 3x_1 + 1 \\ f(2-x_1) - f(x_1+3) = -3x_1 - 2. \end{cases}$$

Sistemaning tenglamalarini qo‘shsak, biz $0 = -1$ ga kelamiz. Keyinchalik murakkab va qiziqarli (5) tenglamani $f(x)$ kvadratik funksiya bo‘lish shartisiz yechish masalasidir. Uning yechimi boshqa funksional tenglamalarni yechishda foydali bo‘lgan yangi g‘oyalardan foydalanadi va shuning uchun biz uni batafsil bayon qilamiz. Funksional tenglamani (1) umumiy shaklda yechishda bo‘lgani kabi, avvalo $1 - x$ ni x ga almashtiramiz (tenglamada $f(x)$ ifoda paydo bo'lishi uchun). Keyin tenglama (5) shaklga ega bo‘ladi.

$$f(x) - f(x+1) = 2x + 5$$

barcha $x \in R$ uchun tenglik o‘rinli.

Funksional tenglama (10) bir xil emas (o‘ng tomondagi $2x + 5$ ifodasi “ortiqcha”). Tenglamalarni yechishning umumiy g‘oyasiga muvofiq, uni bir xil yechimga aylantiraylik. Buning uchun biz tenglamaning ma'lum bir yechimini topamiz. Aslida, bu allaqachon bajarilgan, chunki biz kvadratik funksiyalar sinfiga oid tenglamani yechdik, masalan, $f_0(x) = -x^2 - 4x$ yechim. Endi biz $g(x) = f(x) - f_0(x)$ yangi noma'lum funksiyani kiritamiz va (10) uchun funksional tenglamani yozamiz: $g(x) = g(x+1)$ barcha $x \in R$ uchun.

Ushbu bog‘liqlik butun son satrida aniqlangan davriy funksiya ta'rifiga to‘g ‘ri keladi, $T = 1$ davri bilan. Shunga mos ravishda (5) tenglamaning umumiy yechimi $f(x) = -x^2 - 4x + g(x)$ formula bilan berilgan, bu yerda $g(x) - T = 1$ davri butun davri bo‘yicha aniqlangan ixtiyoriy davriy funksiya.

Yechishning umumiy usuli o‘zgarmasa ham, muhim o‘ziga xos xususiyatlar paydo bo‘ladi. Biz ularni bunday topshiriq misolida ko‘rib chiqamiz.

$\boldsymbol{5 - misol}$. $x \neq 0; 1$ qiymatlarda $f(x)$ funksiyani qanoatlantiradigan, x ning barcha qiymatlarini toping:

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x, \qquad (11)$$

ekstremumga ega. Ushbu funksiyani toping.

Oldingi kabi, funksional tenglamani (11) ikkita noma’lum qatnashgan

$$A = f(x) \text{ va } B = f\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

oddiy tenglama sifatida ko‘rib chiqamiz. x o‘zgaruvchi, bunday holda, parametr rol o‘ynaydi:

$A + B = x$

Oxirgi tizimning ikkinchi tenglamasini $(A + x)(6A - x) = 0$ sifatida qayta yozish mumkin. Shuning uchun, har bir tuzatish uchun

$A + B = x.$

Yana bitta tenglamani olish uchun (13) da x ni o'rniga $\frac{1}{1-x}$ qo‘yamiz:

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow B + C = \frac{1}{1-x},$$

bu erda $C = f\left(\frac{x-1}{x}\right)$. A va B o‘zgaruvchilari bilan bir qatorda C uchinchi noma’lum paydo bo‘ldi. Yana bitta tenglama bo‘lishi kerak. Shu maqsadda (11) da x ning o‘rnini $\frac{x-1}{x}$ ga almashtiramiz:

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f(x) = \frac{x-1}{x} \Leftrightarrow C + A = \frac{x-1}{x}.$$

Ushbu bosqichda bizning jarayonimiz yopiq bo‘lib, bizda uchta noma'lum qatnashgan uchta tenglamalar sistemasi mavjud

$$\begin{cases} A + B = x, \\ B + C = \dfrac{1}{1-x} \\ C + A = \dfrac{x-1}{x} \end{cases}$$

Buni osonlikcha ishlash mumkin. Bizni faqat $A = f(x)$ qiziqtirganligi sababli, uchta tenglamani ham qo'shamiz, yig'indini 2 ga bo'lamiz va undan ikkinchi tenglamani ayiramiz:

$$A = f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{2x(x-1)}, x \neq 0; 1. \qquad (12)$$

x, va funksiyalariga nisbatan (9) tenglamaning yechimiga bergan $\frac{1}{1-x}$ va $\frac{x-1}{x}$ bu funksiyalar funksiyalarning superpozitsiyasining ishlashiga nisbatan uchinchi tartibli guruhni tashkil qiladi.

Endi (12) funksiyaning ekstremum nuqtalarini izlashni boshlashingiz mumkin. Uning hosilasi formula bilan berilgan

$$f'(x) = \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1}{2x^2(x-1)^2}.$$

Shuning uchun uni yangi o‘zgaruvchi $t = x + \frac{1}{x}$ yordamida almashtirish bajarish mumkin:

$$f(x) = \frac{(x^2 - (1+\sqrt{2})x + 1) \cdot (x^2 - (1-\sqrt{2})x + 1)}{2x^2(x-1)^2}.$$

$$x^2 - (1+\sqrt{2})\,x + 1$$

ko‘phad ikkita haqiqiy ildizga ega.

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2} \in (0;1)$$

$$x_2 = \frac{1+\sqrt{2} + \sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2} \in (1;+\infty).$$

va $x^2 - (1-\sqrt{2})\,x + 1$ ko‘phadning diskriminanti manfiy, shuning uchun bu ko‘phad barcha x lar uchun musbat va hosilaning ishorasiga ta'sir qilmaydi. Endi, intervallar usuli yordamida hosilaning ishoralarini va shunga mos ravishda $f(x)$ funksiyasining harakatlarini aniqlashimiz mumkin:

$(-\infty; 0]$ oralig‘ida o‘sadi;
$[0; x_1]$ oralig‘ida o‘sadi;
$[x_1; 1]$ oralig‘ida kamayadi;
$[1; x_2]$ oralig‘ida kamayadi;
$[x_2; +\infty)$ oralig‘ida o‘sadi;

Shunday qilib, $f(x)$ funksiya ikkita ekstremum nuqtaga ega:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2} \in (0;1);$$

$$x_2 = \frac{1+\sqrt{2} + \sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2} \in (1;+\infty).$$

$\boldsymbol{6 - misol}$. Har bir haqiqiy x uchun $f(x)$ sonli funksiya tenglikni qanoatlantiradi

$$x + f(x) = f\big(f(x)\big). \qquad (13)$$

$f\big(f(x)\big) = 0$ tenglamani yeching.

Ushbu misolni ishlash uchun biz *inyeksiya funksiyasi* tushunchasini taqdim etamiz:

$\boldsymbol{Ta'rif}$. $f(x)$ funksiya inyeksion deb ataladi, agar uning har qanday ikkita x_1, x_2 soni uchun uning aniqlanish sohasidagi $f(x_1) = f(x_2)$ tenglik $x_1 = x_2$ degan ma'noni anglatsa.

Ko‘rinib turibdiki, agar funksiya butun aniqlanish sohasi bo‘yicha qat'iy ravishda ko‘payib (kamayib) ketayotgan bo‘lsa, demak u inyeksiya xususiyatiga ega. Bundan tashqari, u yoki bu funksiyalarning monotonligi ishlatilgan ko‘plab misollarda (masalan, tenglamalarni yechishda), inyeksiya ko‘pincha talab qilinadi.

Inyektiv funksiyasi atamasi bilan bir qatorda, inyeksiya va bir-biriga mos keladigan atamalar ishlatiladi.

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ munosabat $x_1 \neq x_2$ (x_1, x_2 funksiyani aniqlash sohasiga kiritilgan) $\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ munosabatiga tengdir.

Endi , masalamizga qaytib, ko‘rib chiqilayotgan funksiya inyeksiya ekanligini isbotlaylik. Darhaqiqat, agar $f\ (x_1)\ =\ f(x_2)$ bo‘lsa, unda $f(x)$ uchun tenglamani $x = f\ (f\ (x)) - f\ (x)$ deb yozamiz, bizda

$x_1 = f(f\ (x_1)) - f\ (x_1)\ =\ f(f(x_2\ )) - \ f(x_2) = x_2$

mavjud. Endi $f\big(f(x)\big) = 0$ tenglama bilan ishlaymiz. Avvalo, uning nechta ildizi bo‘lishi mumkin. Agar $x_1; x_2$, $f(f(x)) = 0$ tenglamaning ildizlari bo‘lsa, u holda $f\big(f(x_1)\big) = f\big(f\ (x_2)\big)$ va $f(x)$ funksiyasining isbotlangan inyeksiyasidan $f(x_1) = f(x_2)$ kelib chiqadi. Inyeksiya xususiyatini yana qo‘llasak, biz $x_1 =\ x_2$ ni olamiz. Shunday qilib, $f(f(x)) = 0$ tenglamada bir nechta ildiz bo‘lishi mumkin emas. Endi biz x ning o‘rniga 0 sonini qo‘yamiz. Bu quyidagi tenglikni beradi: $f\ (0)\ =\ f\ (f\ (0))$. $f\ (x)$ funksiyasining isbotlangan inyeksionligi tufayli bu $0\ =\ f\ (0)$, keyin $f(f\ (0))\ =\ f\ (0)\ \ =\ 0$, ya'ni 0 soni $f(f\ (x))\ =\ 0$ tenglamaning ildizi. 6-masala matnidan (13) funksional tenglamani qanoatlantiradigan funktsiyalar mavjudligi kelib chiqsa ham umuman olganda, bu tenglamani yechish mumkin emas, lekin yuqorida tavsiflangan usullardan foydalanib, masalan, ko‘phadlar sinfida (13) tenglama aniq ikkita yechimga ega ekanligini isbotlash mumkin:

$$f_1(x) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}x,\quad f_2(x) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}x$$

Darhaqiqat, agar $f(x),\ n \geq\ 1$ darajadagi ko‘phad bo'lsa, unda (13) tenglamaning chap tomonida n darajali ko‘phad, o‘ng tomonda $n^{\ 2}$ darajali ko‘phad mavjud. Bu faqat $n = 1$ holatida mumkin. Shuning uchun biz chiziqli funksiyalarni ko‘rib chiqish bilan cheklanishimiz mumkin: $f\ (x) = kx + b$. Ular uchun (15) tenglama shaklni oladi

$$x\ +\ (kx\ +\ b)\ =\ k\ (kx\ +\ b)\ +\ b$$

barcha x uchun, yoki

$$(k\ +\ 1)\,q\ +\ b\ =\ k^2x\ +\ (kb\ +\ b)$$

barcha x uchun. Ushbu tenglik mavjud bo‘lgan sistemaga tengdir:

$$\begin{cases} k + 1 = k^2 \\ b = kb + b \end{cases}$$

Sistema ikkita yechimga ega: $(k; b) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 0\right)$, $(k; b) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right)$.

(13) funksional tenglamani qanoatlantiradigan, keyingi ikkita chiziqli funksiyaga mos keladi:

$$f_1(x) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}x,\quad f_2(x) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}x. \qquad (14)$$

Xulosa. Tahlil qilinayotgan masala qiziq, chunki funksional tenglamani yechish va shu bilan $f(x)$ funksiyasining aniq shaklini aniqlash mumkin emas, lekin asosiy masala $\big(f\big(f(x)\big) = 0\big)$ tenglamaning yechimi hal qilinmoqda.

Adabiyotlar:

1. Engel A.. Problem-Solving Strategies. Springer-Verlag, New York, 1998.
2. Туманов С.А.. Поиски решения задач. М. «Просвещение», 1969 г.
3. Abduaxmedov A.A., Nasimov H.A., Nosirov U.M., Husanov J.H.. Algebra va matematik analiz asoslari. I-qism, Toshkent, O’qituvchi nashriyoti, 2001 yil.