

PEDAGOGIK MAHORAT

11
2023

ISSN 2181-6833



9 772181 683 301

ISSN 2181-6883

PEDAGOGIK MAHORAT

Ilmiy-nazariy va metodik jurnal

11-son (2023-yil, dekabr)

Jurnal 2001-yildan chiqa boshlagan

Buxoro – 2023

PEDAGOGIK MAHORAT

Ilmiy-nazariy va metodik jurnal

2023, № 1

Jurnal O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi OAK Rayosatining 2016-yil 29-dekabrda qarori bilan **pedagogika** va **psixologiya** fanlari bo‘yicha dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo‘lgan zaruriy nashrlar ro‘yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2001-yilda tashkil etilgan.

Jurnal 1 yilda 12 marta chiqadi.

Jurnal O‘zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2016-yil 22-fevral № 05-072-sonli guvohnoma bilan ro‘yxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti

Tahririyat manzili: 200117, O‘zbekiston Respublikasi, Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko‘chasi, 11-uy
Elektron manzil: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

TAHRIR HAY’ATI:

Bosh muharrir: Adizov Baxtiyor Rahmonovich – pedagogika fanlari doktori, professor

Mas’ul kotib: Sayfullayeva Nigora Zakiraliyevna – pedagogika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD)

Xamidov Obidjon Xafizovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Begimqulov Uzoqboy Shoyimqulovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Navro‘z-zoda Baxtiyor Nigmatovich – iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Mahmudov Mels Hasanovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Ibragimov Xolboy Ibragimovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Rasulov To‘lqin Husenovich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor

Yanakiyeva Yelka Kirilova, pedagogika fanlari doktori, professor (N. Rilski nomidagi Janubiy-G‘arbiy Universitet, Bolgariya)

Andriyenko Yelena Vasilyevna pedagogika fanlari doktori, professor (Novosibirsk davlat pedagogika universiteti Fizika, matematika, axborot va texnologiya ta’limi instituti, Novosibirsk, Rossiya)

Romm Tatyana Aleksandrovna pedagogika fanlari doktori, professor (Novosibirsk davlat pedagogika universiteti Tarix, gumanitar va ijtimoiy ta’lim instituti, Novosibirsk, Rossiya)

Chudakova Vera Petrovna, psixologiya fanlari nomzodi (Ukraina pedagogika fanlari milliy akademiyasi, Ukraina)

Hamroyev Alijon Ro‘ziqulovich – pedagogika fanlari doktori (DSc), dotsent

Qahhorov Siddiq Qahhorovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Mahmudova Muyassar, pedagogika fanlari doktori, professor

Kozlov Vladimir Vasilyevich, psixologiya fanlari doktori, professor (Yaroslavl davlat universiteti, Rossiya)

Tadjixodjayev Zokirxo‘ja Abdusattorovich, texnika fanlari doktori, professor

Amonov Muxtor Raxmatovich, texnika fanlari doktori, professor

O‘rayeva Darmonoy Saidjonovna, filologiya fanlari doktori, professor

Durdiyev Durdimurod Qalandarovich, fizika-matematika fanlari doktori, professor

Mahmudov Nosir Mahmudovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Olimov Shirinboy Sharofovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Chariyev Irgash To‘rayevich, pedagogika fanlari doktori, professor

Qiyamov Nishon Sodiqovich, pedagogika fanlari doktori (DSc), professor

Shomirzayev Maxmatmurod Xuramovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Ro‘ziyeva Dilnoza Isomjonovna, pedagogika fanlari doktori, professor

Qurbonova Gulnoz Negmatovna, pedagogika fanlari doktori (DSc)

To‘xsanov Qahramon Rahimboyevich, filologiya fanlari doktori, dotsent

Nazarov Akmal Mardonovich, psixologiya fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD), dotsent

Jumaev Rustam G‘aniyevich, siyosiy fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD), dotsent

Nurulloev Firuz No‘monjonovich, pedagogika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD)

Navruz-Zoda Layli Baxtiyorovna, iqtisodiyot fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD)

ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ МАСТЕРСТВО

Научно-теоретический и методический журнал

№ 11, 2023

Решением Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан от 29 декабря 2016 года журнал включён в перечень изданий, рекомендованных для публикации научных результатов статей по направлениям «Педагогика» и «Психология».

Журнал основан в 2001 году.

Журнал выходит 12 раз в год.

Журнал зарегистрирован Бухарским управлением агентства по печати и массовой коммуникации Узбекистана.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации № 05-072 от 22 февраля 2016 г.

Учредитель: Бухарский государственный университет

Адрес редакции: 200117, Узбекистан, г. Бухара, ул. Мухаммад Икбол, 11.

E-mail: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Главный редактор: Адизов Бахтиёр Рахманович – доктор педагогических наук, профессор

Ответственный редактор: Сайфуллаева Нигора Закиралиевна – доктор философии педагогических наук (PhD)

Хамидов Обиджон Хафизович, доктор экономических наук

Бегимкулов Узакбай Шаимкулович, доктор педагогических наук, профессор

Навроз-заде Бахтиёр Нигматович, доктор экономических наук, профессор

Махмудов Мэлс Хасанович, доктор педагогических наук, профессор

Ибрагимов Холбой Ибрагимович, доктор педагогических наук, профессор

Расулов Тулкин Хусенович, доктор физико-математических наук, профессор

Янакиева Елка Кирилова, доктор педагогических наук, профессор (Болгария)

Андрюченко Елена Васильевна (Институт физико-математического, информационного и технологического образования НГПУ, Новосибирск, Россия)

Ромм Татьяна Александровна (Институт истории, гуманитарного, социального образования ФГБОУ ВО НГПУ, Новосибирск, Россия)

Чудакова Вера Петровна, кандидат психологических наук (Национальная академия педагогических наук Украины, Украина)

Хамроев Алижон Рузикулович, доктор педагогических наук (DSc), доцент

Каххаров Сиддик Каххарович, доктор педагогических наук, профессор

Махмудова Муяссар, доктор педагогических наук, профессор

Козлов Владимир Васильевич, доктор психологических наук, профессор (Ярославль, Россия)

Таджиходжаев Закирходжа Абдусаттарович, доктор технических наук, профессор

Аманов Мухтор Рахматович, доктор технических наук, профессор

Ураева Дармоний Саиджановна, доктор филологических наук, профессор

Дурдиев Дурдимурод Каландарович, доктор физико-математических наук, профессор

Махмудов Насыр Махмудович, доктор экономических наук, профессор

Олимов Ширинбой Шарофович, доктор педагогических наук, профессор

Чариев Иргаш Тураевич, доктор педагогических наук, профессор

Киямов Нишон Содикович, доктор педагогических наук, профессор

Шомирзаев Махматмурод Хурамович, доктор педагогических наук, профессор

Рузиева Дилноза Исомжоновна, доктор педагогических наук, профессор

Курбонова Гулноз Несматовна, доктор педагогических наук (DSc)00

Тухсанов Кахрамон Рахимбоевич, доктор филологических наук, доцент

Назаров Акмал Мардонович, доктор философии психологических наук (PhD), доцент

Жумаев Рустам Ганиевич, доктор философии политических наук (PhD), доцент

Нуруллоев Фируз Нумонжонович, доктор философии педагогических наук (PhD)

Навроз-заде Лайли Бахтиёровна, доктор философии экономических наук (PhD)

PEDAGOGICAL SKILLS

The scientific-theoretical and methodical journal

№ 11, 2023

By the decision of the Higher Attestation Commission under the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan dated December 29, 2016, the journal was included in the list of publications recommended for publishing scientific results of articles in the areas of «**Pedagogy**» and «**Psychology**».

The journal was founded in 2001.

The journal is published 12 times a year.

The journal is registered by the Bukhara Department of the Agency for Press and Mass Communication of Uzbekistan.

The certificate of registration of mass media № 05-072 of 22 February 2016

Founder: Bukhara State University

Publish house: 200117, Uzbekistan, Bukhara, Muhammad Ikbol Str., 11.

E-mail: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

EDITORIAL BOARD:

Chief Editor: Pedagogical Sciences of Pedagogy, Prof. Bakhtiyor R. Adizov.

Editor: Doctor of Philosophy in Pedagogical Sciences (PhD), Nigora Z. Sayfullaeva

Doctor of Economics Sciences Prof. Obidjon X. Xamidov

Doctor of Pedagogical Sciences, Prof. Uzokboy Sh. Begimkulov

Doctor of Economics Sciences, Prof. Bakhtiyor N. Navruz-zade

Doctor of Pedagogical Sciences, Prof. Mels Kh. Mahmudov

Doctor of Pedagogical Sciences, Prof. Holboy I.Ibragimov

Doctor of Physical and Mathematical Sciences (DSc), Prof. Tulkin Kh. Rasulov

Doctor of Pedagogical Sciences, Prof. Yelka K. Yanakieva (Bulgaria)

Doctor of Pedagogical Sciences, Prof. Andrienko Yelena Vasilyevna (Russia)

Doctor of Pedagogical Sciences, Prof. Romm Tatyana Aleksandrovna (Russia)

Candidate of Psychology, Vera P. Chudakova (Kiev, Ukraina)

Doctor of Pedagogical Sciences (DSc), Doc. Alijon R. Hamroev

Doctor of Pedagogical Sciences, Prof. Siddik K. Kahhorov

Doctor of Pedagogical Sciences, Prof.M.Mahmudova

Doctor of Psychology, Prof. Vladimir V. Kozlov (Yaroslavl, Russia)

Doctor of Technical sciences, Prof. Zakirkhodja A. Tadjikhodjaev

Doctor of Technical sciences, Prof. Mukhtor R.Amanov

Doctor of Philology, Prof. Darmon S. Uraeva

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Prof. Durdimurod K. Durdiev

Doctor of Economics, Prof. Nasir N. Mahmudov

Doctor of Pedagogical Science, Prof. Shirinboy Sh. Olimov

Doctor of Pedagogical Science, Prof. Irgash T. Chariev

Doctor of Pedagogical Science, Prof. Nishon S. Kiyamov

Doctor of Pedagogical Sciences, Prof. Maxmatmurod X. Shomirzaev

Doctor of Pedagogical Sciences, Prof. Dilnoza I. Ruzieva

Doctor of Pedagogical Sciences, Prof. Gulnoz N. Qurbonova

Doctor of Philology, Doc. Qahramon R.Tuxsanov

Doctor of Psychology, Doc. Akmal M. Nazarov

PhD in Political Sciences, Doc. Rustam G.Jumaev

PhD in Pedagogical Sciences, Firuz N. Nurulloev

PhD in Economics Sciences, Layli B. Navruz-zade

MUNDARIJA

№	Familiya I.Sh.	Mavzu	Bet
FILOLOGIYA VA TILLARNI O‘QITISH			
1.	NEMATOVA Zebo Tursunboyevna	Boshlang‘ich sinflarda autentik materiallar orqali ingliz tili o‘qitish usullari	8
2.	YADGAROVA Lola Jalalovna, ERGASHEVA Sarvinoz Bakhodirovna	Effective use of innovative technologies in english lessons	14
3.	КОМИЛОВА Дилдора Шавкатовна	Нутқ одобиди дўстлик концептининг берилиши	18
ANIQ VA TABIIY FANLARNI O‘QITISH			
4.	НУРУЛЛОЕВ Феруз Нўмонжонович, ШАДМАНОВА Камола Умед қизи	Методика обучения школьников современных программных средств	22
5.	ABDULLAYEV Alibek Qodiraliyevich	Pedagogika ta’lim sohasi uchun mutaxassislar tayyorlashning yangi yo’nalishlari	30
6.	AVEZOV Alijon Xayrulloevich, TOSHPO‘LATOVA Shahzodabonu Voxid qizi	Matematika fanini o‘qitishda noan’anaviy ta’lim yondashuvlari	34
7.	BERDIYEVA Dinora Erkinovna	Oliy ta’lim muassasalarida “informatika va raqamli texnologiyalar” fanini o‘qitish muammolari	43
8.	BOBOYEVA Muyassar Norboyevna, OCHILOVA Niginabonu Abduvoxid qizi	Umumiy o‘rta ta’lim maktablarida matnli masalalarni yechish usullari	48
9.	ISROILOV Nurshohruh Sunnat o‘g‘li,	Talabalarni virtual muhitda dasturlashga o‘rgatish usuli	54
10.	KAMALOVA Nilufar Ilxomovna	Semiotik yondashuv asosida python dasturlash tilini o‘qitish metodikasi	59
11.	KHASANOVA Nilufar Khaqnazarovna, NIZAMOVA Saida Adilovna	Finlandiya va O‘zbekistonda kimyo fanini o'qitishning solishtirma tahlili	64
12.	LUTFILLAEV Maxmud Xasanovich, MELIEVA Mohinur Baxromovna	Kompyuter imitatsion modellar asosida o‘qitish texnologiyasi	69
13.	MIXLIYEV Nurbek Avloyorovich	Talabalarni kimyo fanidan amaliy tayyorgarliklarini biofalsafiy yondashuv asosida tashkil etishning pedagogik asoslari	74
14.	NUROLLIYEV Novruz Shoymardon o‘g‘li	Fizikadan talabalarni kasbga yo‘naltirib o‘qitishda ilmiy va o‘quv-bilish faolligini rivojlantirishning metodik modeli	78
15.	NUROVA Oliya Salomovna	Mashina detallari fanini o‘qitishda amaliy mashqulotlarini tashkil etish va o‘tkazish metodikasi	85
16.	O‘KTAMOV Madadjon O‘ktam o‘g‘li	Pedagogika oliy ta’lim muassasalari talabalarining informatikadan axborot-texnologik kompetentligini rivojlantirish metodikasi	91
17.	QODIROV Abbos	Biologiya fanlarini masofaviy ta’lim sharoitida o‘qitish	96

18.	LUTFILLAYEV Maxmud Xasanovich, SAFAROV Abbos Abdurasul o'g'li	Oliy ta'limda matematika fanlarini o'qitishda amaliy dasturiy paketlar va kompyuter imitatsion modellardan foydalanishning farqli jihatlari	100
19.	TILLABOYEV Azlarxon Magbarxonovich	Astronomiya kursini axborot texnologiyalari muhitida o'qitishning o'ziga xos jihatlari	108
20.	TURAYEVA Lolaxon Yuldashevna	Elektr qarshiliklarni ketma-ket va parallel ulash mavzusini phet colorado dasturiy ilovasi orqali o'qitishning afzalliklari	117
21.	XAYITOVA X.G'., QO'SHMURODOVA Z.B.	Funksional tenglamalar yechishning ayrim metodlari	125
22.	ARTIKOV Xamza Kaxxarovich	Bo'lajak fizika o'qituvchilarining fizika eksperimentidan foydalanish sohasidagi kompetensiyalarini rivojlantirish	131
23.	АРЗИКУЛОВ Зайниддин Қўзибоевич	Физикани таълим турлари алоқадорлигида ўқитиш технологиялари	136
24.	ДАВУРОВ Камол Набиевич	Умумий ўрта таълим мактабларида “информатика” фанини ўқитишнинг янги ташкилий шаклларида фойдаланиш	140
25.	ДАВУРОВА Нигина Жангабай қизи	Кимё фани бўйича масалалар ечиш талабалар билиш фаолиятини ривожлантириш воситаси сифатида	145
26.	TO'RAYEV Rasul Norto'jiyevich	Interfaol metodlar asosida matritsa va chiziqli tenglamalar sistemasining kimyoga tatbiqini o'rganish	150
27.	BAHRANOVA Umida Islomovna	Gidravlika issiqlik texnikasi fanini umumiy fizika fani bilan integratsiyalab o'qitishda virtual laboratoriyalardan foydalanish metodikasi	156
28.	TURAYEVA Lolaxon Yuldashevna	“Sferik ko'zguda tasvir yasash” mavzusini phet interactive simulations dasturiy ilovasi orqali o'qitish	161
JISMONIY MADANIYAT VA SPORT			
29.	ABDULLAYEV Amrillo Nassulloyevich	Harbiy ta'lim muassasalari talabalarining jismoniy tayyorgarligi dinamikasi	169
30.	MARDONOV Nodir Jalolovich	Axborot texnologiyalarining jismoniy tarbiya va sportdagi o'rni	174
SAN'AT1			
31.	FAYZULLAYEV Ermat Majidovich	Milliy musiqa san'atining yoshlar ma'naviy- madaniyatini shakllantirishda tutgan o'rni	177
32.	OMONOV Xasanxon Sulaymonovich	O'zbek milliy cholg'ularni takomillashtirish	182
33.	Xasanov Xalim Ravshanovich	Musiqa darslarida fanlararo aloqadorlikni tashkil qilish	187
34.	XAYDAROV Sulaymon Amirqulovich, SAXOBAT Umirova Saxobjonovna	Tarix darslarida tarixiy miniatyuralarning o'rni	191
35.	ЭРГАШЕВ Нажибулло Хасанович	Музыка маданияти дарсларида ўқитувчининг педагогик маҳорати	195
IQTISODIY TA'LIM VA TARBIYA			
36.	ALLABERGANOVA Nargiza Polvannazirovna	Tarbiyachilarning polifunksional yondashuv asosida maktabgacha yoshdagi bolalarga iqtisodiy tushunchalar bilan tanishtirishga doir faoliyatini tashkil etish	199
37.	QUCHQOROVA Nargiza Matajonovna	Bo'lajak tarbiyachilar iqtisodiy kategoriyalarini rivojlantirishning pedagogik –psixologik konseptual asoslari	203

FUNKSIONAL TENGLAMALAR YECHISHNING AYRIM METODLARI

Xayitova X.G.,

Buxoro davlat universiteti “Matematik analiz” kafedrası o‘qituvchisi,

xilola_xayitova@mail.ru,

x.g.xayitova@buxdu.uz,

Qo‘shmurodova Z.B.,

Buxoro davlat universiteti matematika ta’lim yo‘nalishi 4-bosqich talabasi

Maktab matematika fani o‘qituvchisini tayyorlashda ularning matematik tushunchalardan mohirona foydalanish ko‘nikmasini shakllantirish muhim hisoblanadi. Biroq ayrim matematik tushunchalar, masalan, funksional tenglamalar tushunchasi maktab matematika kursida o‘z nomi bilan ishlatilmaydi. Shu sababli bo‘lajak matematika fani o‘qituvchilari Matematik praktikum darslarida yoki malaka oshirish kurslari davomida funksional tenglamalar va ularni yechish usullari bo‘yicha bilim, ko‘nikma va malakalarga ega bo‘lishi talab etiladi. Mazkur maqolada matematika fani o‘qituvchilariga shu yo‘nalishda xizmat qiluvchi manbalar yoritilgan bo‘lib, tenglamalar yechishning ayrim metodlariga to‘xtalib o‘tilgan hamda bilim oluvchilarga qulaylik yaratuvchi yechimlar yoritilgan. Misollardan namunaviy yechimlar keltirilgan va yechish metodlari izohlangan.

Kalit so‘zlar: funksional tenglama, yechim, parametr, inyekiv funksiya, metod, chiziqli funksiya, koeffitsiyent.

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Важно формировать навыки умелого использования математических понятий при подготовке школьных учителей математики. Однако некоторые математические понятия, например понятие функциональных уравнений, в школьном курсе математики не используются под своим названием. По этой причине будущие учителя математики обязаны приобретать знания, навыки и умения по функциональным уравнениям и методам их решения на математических практикумах или курсах повышения квалификации. В данной статье выделены ресурсы, которые служат учителям математики в этом направлении, затронуты некоторые методы решения уравнений и выделены решения, которые сделают обучение удобным для учащихся. Примеры решений представлены на примерах и объяснены методы решения.

Ключевые слова: Функциональное уравнение, решение, параметр, инъективная функция, метод, линейная функция, коэффициент.

SOME METHODS FOR SOLVING FUNCTIONAL EQUATIONS

It is important to develop skills in the skillful use of mathematical concepts when preparing school mathematics teachers. However, some mathematical concepts, for example the concept of functional equations, are not used by their name in the school mathematics course. For this reason, future mathematics teachers are required to acquire knowledge, skills and abilities on functional equations and methods for solving them at mathematical workshops or advanced training courses. This article highlights resources that serve mathematics teachers in this area, touches on some methods for solving equations, and highlights solutions that will make learning convenient for students. Sample solutions are presented with examples and solution methods are explained.

Key words: Functional equation, solution, parameter, injective function, method, linear function, coefficient.

Kirish. Parametrlar tenglamalar-eng sodda funksional tenglamalar bo‘lib, unda noma’lum funksiya bir yoki bir nechta sonli parametrlar orqali ifodalanadi (bu kabi funksiyalarning eng sodda va eng keng tarqalgan misoli ko‘phadlardir). Ushbu holda, funksiyaning yechimini topish muammosi ushbu raqamli parametrlarning qiymatlarini aniqlashdan iborat bo‘ladi.

1 – misol. Quyidagi

$$2f(x+2) + f(4-x) = 2x + 7 \quad (1)$$

tenglikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $y = f(x)$ chiziqli funksiya mavjudmi?

Asosiy qism. Ta'rifga ko'ra, chiziqli funksiya $f(x) = kx + b$ sifatida ifodalanadigan funksiyadir. k va b sonli parametrlari chiziqli funksiyani o'ziga xos tarzda ifodalaydi, chunki x o'zgaruvchining barcha qiymatlari uchun $k_1x + b_1 = k_2x + b_2$ hamda $k_1 = k_2, b_1 = b_2$ tengliklar o'zaro teng kuchli hisoblandi. Bundan kelib chiqib, quyidagi tasdiqni qo'llaymiz:

Ikki ko'phad bir xil darajada teng, agar o'zgaruvchining koeffitsiyentlari bir xil darajalarida teng bo'lsa (xususan, ko'phadlarning darajalari ham mos keladigan bo'lsa).

Shuning uchun bizning misolimiz quyidagicha isloh qilinishi mumkin:

Barcha x lar uchun

$$2(k(x + 2) + b) + (k(4 - x) + b) = 2x + 7 \quad (2)$$

tenglikni qanoatlantiradigan k va b sonlari mavjudmi?

Qavslarni ochib, o'xshash hadlarni ixchamlab, (2) tenglamani quyidagi shaklga keltiramiz:

$$kx + 8k + 3b = 2x + 7$$

barcha x lar uchun. Bir xil darajadagi o'zgaruvchilarning koeffitsiyentlarni tenglashtirsak, biz misolni o'zgartiramiz:

Ushbu tengliklarni qanoatlantiradigan k va b sonlari mavjudmi

$$\begin{cases} k = 2 \\ 8k + 3b = 7 \end{cases} \quad (3)$$

Ushbu shaklda misolimiz shunchaki (3) sistemaning mosligi masalasiga keladi. Ushbu sistema yagona yechimiga ega ekanligini ko'rish oson $k = 2, b = -3$. Demak, yuqoridagi funksional tenglamani qanoatlantiradigan yagona $f(x) = 2x - 3$ chiziqli funksiya mavjud ekanligini ko'rish mumkin.

Oddiy tenglamalarga kelsak, noma'lum had songa teng bo'lganda, funksional tenglamada umuman yechimlar bo'lmaydi yoki cheksiz yechimlar to'plami bo'lgan holatlar mavjud. Keling, ushbu holatlarni ikkita misol bilan tushuntirib beramiz.

2 – misol. x ning barcha qiymatlarida

$$f(x + 3) - f(2 - x) = 3x + 1 \quad (4)$$

tenglikni qanoatlantiradigan $y = f(x)$ chiziqli funksiya mavjudmi?

1-misolni yechishda bo'lgani kabi, quyidagicha qayta tuzish mumkin:

Ushbu tengliklarni qanoatlantiradigan k va b sonlari mavjudmi?

$$\begin{cases} 2k = 3, \\ k = 1 \end{cases}$$

Ushbu sistema aniq bir-biriga zid. Shunga ko'ra, funksional tenglama chiziqli funksiyalar sinfida echimga ega emas.

3 – misol. x ning barcha qiymatlarida

$$f(1 - x) - f(2 - x) = -2x + 7 \quad (5)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi $y = f(x)$ kvadratik funksiyani toping.

Ta'rifga ko'ra, kvadratik funksiya

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

ko'rinishda ifodalanishi mumkin bo'lgan funksiyadir. Shuning uchun bizning misolimizni quyidagi ko'rinishda qayta tuzishimiz mumkin:

Shunday $a \neq 0, va c$ sonlarni topingki, x ning barcha qiymatlarida

$$(a(1 - x)^2 + b(1 - x) + c) - (a(2 - x)^2 + b(2 - x) + c) = -2x + 7$$

$$2ax - (3a + b) = -2x + 7.$$

Ikki polinom bir xil darajada teng bo'lganligi sababli, o'zgaruvchining koeffitsientlari bir xil darajalarida teng bo'lsa, misol quyidagi shaklga ega bo'ladi:

Quyidagi tengliklarni qanoatlantiradigan $a \neq 0, b$ va c sonlarni toping

$$\begin{cases} 2a = -2 \\ -3a - b = 7. \end{cases} \quad (6)$$

Aks holda (6) sistemani yechishimiz kerak bo'ladi.

Agar bu sistema ikki noma'lum a va b qatnashgan sistema sifatida qaralsa, unda u yagona yechimga ega bo'ladi $a = -1, b = -4$. Biroq, ushbu sistema bevosita boshqa noma'lum c parametrni o'z ichiga oladi. c ga shartlar qo'yilmaganligi sababli, bu noma'lum ixtiyoriy haqiqiy qiymatga ega bo'lishi mumkin. Shunday qilib, (6) sistema $(a; b; c) = (-1; -4; c)$ shakldagi cheksiz ko'p yechimlarga ega, bu erda $c \in R$. Shunga ko'ra, funksional tenglama kvadratik funksiyalar sinfida cheksiz ko'p yechimlarga ega. Ushbu yechimlarning barchasi $f(x) = -x^2 - 4x + c$ tenglik bilan tavsiflanishi mumkin, bu erda c - ixtiyoriy o'zgarmas son.

Keyingi misolda, ma'lum bir funksiya sinfidagi funksional tenglamani yechish talab qilinadi (n darajadagi ko'phadlar), lekin tenglamaning o'zi ilgari muhokama qilinganlarga qaraganda ancha murakkab.

4 – misol. n – darajadagi barcha ko‘phadlarni toping ya’ni $a_n \neq 0$ koeffitsienti bilan:

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \\ P(x^2) &= (P(x))^2, x \in (-\infty; +\infty). \end{aligned} \quad (7)$$

Ushbu misolni ishlashimiz uchun biz $P(x)$ ni $Q(x) + a_n x^n$ shaklida ifodalaymiz, bu erda

$$Q(x) = a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Biz $Q(x)$ ko‘phadning darajasini bilmaymiz, chunki uning koeffitsientlarining ba’zilari (yoki barchasi) 0 ga teng bo‘lishi mumkin. Lekin $Q(x)$ ko‘phad darajasi $(n-1)$ dan oshmaydi. Ushbu darajani k bilan belgilaymiz, $Q(x)$ ko‘phadning koeffitsientlaridan kamida bittasi 0 ga teng emas deb qabul qilamiz. Keyin (7) ayniyat quyidagi shaklga keladi.

$$Q(x^2) + a_n x^{2n} = (Q(x))^2 + 2a_n x^n Q(x) + a_n^2 x^{2n}, \quad x \in (-\infty; +\infty). \quad (8)$$

Ikki ko‘phad bir xil darajada teng, agar koeffitsientlar o‘zgaruvchining bir xil darajalarida teng bo‘lsa (xususan, ko‘phadning darajalari ham mos keladigan bo‘lsa).

$Q(x^2)$ ko‘phadining darajasi $2k$ ga teng, $(Q(x))^2$ ko‘phadining darajasi $2k$, $2a_n x^n Q(x)$ ko‘phadining darajasi $n+k$ ga teng. Shuning uchun (8) tenglamadagi $2n$ daraja shartlari faqat $a_n x^{2n}$ (chap tomonda) va $a_n^2 x^{2n}$ (o‘ng tomonda) va shuning uchun $a_n = a_n^2$ va $a \neq 0$. Bu bizga (8) tenglikni quyidagicha ifodalashga imkon beradi:

$$Q(x^2) = (Q(x))^2 + 2x^n Q(x), \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

Yuqorida aytib o‘tganimizdek, $Q(x^2)$ ko‘phad darajasi $2k$, $(Q(x))^2$ ko‘phad darajasi $2a_n x^n Q(x)$ ko‘phadning darajasi $n+k$, $k < n$ bo‘lgani uchun, o‘ngdagi ko‘phadning darajasi chap tomondagi ko‘phad darajasidan kattaroq bo‘lishi mumkin emas.

Ammo bu dalillar $Q(x)$ ko‘phadining koeffitsientlaridan kamida bittasi 0 ga teng emas degan taxminga asoslandi. Agar $Q(x)$ ko‘phadning barcha koeffitsientlari 0 ga teng bo‘lsa, u holda $Q(x) \equiv 0$ bo‘ladi. Shunda yuqorodagi tenglik

$$a_n x^{2n} = a_n^2 x^{2n}, \quad x \in (-\infty; +\infty),$$

shaklini oladi, va $a_n = 1$ tenglik o‘rinlidir.

Demak, n darajali ko‘phadlar sinfidagi (7) funksional tenglamaning yagona yechimi $P(x) = x^n$ dir.

1-masalaga kelsak, asl funksional tenglamani (1) umumiy shaklda qanoatlantiradigan boshqa funksiyalar mavjudmi $f(x)$ (albatta chiziqli emas). Bu savolga javob berish uchun (1) funksional tenglamani umumiy shaklda izlaymiz.

Buning uchun dastlab, x ni $x-2$ bilan almashtiramiz (tenglamada $f(x)$ ifoda paydo bo‘lishi uchun). Keyin (1) tenglama shaklga ega bo‘ladi

$$2f(x) + f(6-x) = 2x+3 \quad (9)$$

barcha x uchun.

Ushbu tenglikni ikkita noma'lum $A = f(x)$ va $B = f(6-x)$ uchun oddiy tenglama deb hisoblash mumkin, o‘zgaruvchisi x . Bu holda parametr quyidagi rollarni o‘ynaydi:

$$2A + B = 2x + 3.$$

Bizda ikkita noma'lum miqdor mavjud bo‘lganligi sababli, biz A va B uchun yana bitta tenglamani izlaymiz, buning uchun (9) x tenglikni $6-x$ ga almashtiramiz (axir bu x ning barcha qiymatlari uchun to‘g‘ri keladi, shuning uchun x o‘zgaruvchi o‘rniga har qanday sonni yoki ifodani qo‘yishingiz mumkin):

Barcha x uchun

$$2f(6-x) + f(x) = -2x + 15.$$

$$A = f(x) \text{ va } B = f(6-x)$$

o‘zgaruvchilar nuqtayi nazaridan bu tenglik shuni anglatadi

$$2B + A = -2x + 15.$$

Shunday qilib, quyidagi sistema kelib chiqadi:

$$\begin{cases} 2A + B = 2x + 3, \\ 2B + A = -2x + 15 \end{cases}$$

Ushbu tengliklardan $B = f(6-x)$ ni chiqarib tashlaymiz

$$A = f(x) = 2x - 3.$$

(9) funksional tenglamani yechish uchun tavsiflangan usul chekli sonli ildizlarga ega - bu ikkita funksiya to‘plami

$$\varphi_0(x) = x, \quad \varphi_1(x) = 6 - x$$

ga nisbatan yopiq bo‘lishi bilan bog‘liq. Ushbu to‘plamdan istalgan ikkita funksiya yig‘indisi ushbu to‘plamda kiruvchi boshqa funksiyani ifodalaydi. Darhaqiqat, buni tekshirish oson

$$\varphi_0(\varphi_0(x)) = \varphi_0(x),$$

$$\begin{aligned}\varphi_0(\varphi_1(x)) &= \varphi_1(x), \\ \varphi_1(\varphi_0(x)) &= \varphi_1(x), \\ \varphi_1(\varphi_1(x)) &= \varphi_0(x).\end{aligned}$$

Zamonaviy algebra nazariyasidan foydalanib, $\varphi_0(x) = x$ va $\varphi_1(x) = 6 - x$ funksiyalar guruhni tashkil qiladi deb aytishimiz mumkin. Guruh tushunchasi zamonaviy matematikaning eng asosiy tushunchalaridan biri bo‘lib, turli xil qo‘llanmalarda keng qo‘llaniladi.

Shunga o‘xshash mulohazalar shuni ko‘rsatadiki (4) tenglama butun sonlar qatorida aniqlangan funksiyalar sinfiga yechimga ega emas. Bundan tashqari, har qanday $f(x)$ funksiya x_1, x_2 ikki xil son uchun bir vaqtning o‘zida (4) tenglamani qanoatlantira olmaydi.

Demak, ushbu xulosa sistemaning mos kelmasligini anglatadi

$$\begin{cases} f(x_1 + 3) - f(2 - x_1) = 3x_1 + 1, \\ f(x_2 + 3) - f(2 - x_2) = 3x_2 + 1. \end{cases}$$

1 nuqtaga nisbatan x_1 va x_2 ning simmetriyasi $-\frac{1}{2}$ demak, $x_1 + x_2 = -1$, ushbu sistemani qayta yozish mumkin

$$\begin{cases} f(x_1 + 3) - f(2 - x_1) = 3x_1 + 1 \\ f(2 - x_1) - f(x_1 + 3) = -3x_1 - 2. \end{cases}$$

Sistemaning tenglamalarini qo‘shsak, biz $0 = -1$ ga kelamiz. Keyinchalik murakkab va qiziqarli (5) tenglamani $f(x)$ kvadratik funksiya bo‘lish shartisiz yechish masalasidir. Uning yechimi boshqa funksional tenglamalarni yechishda foydali bo‘lgan yangi g‘oyalardan foydalanadi va shuning uchun biz uni batafsil bayon qilamiz. Funksional tenglamani (1) umumiy shaklda yechishda bo‘lgani kabi, avvalo $1 - x$ ni x ga almashtiramiz (tenglamada $f(x)$ ifoda paydo bo‘lishi uchun). Keyin tenglama (5) shaklga ega bo‘ladi.

$$f(x) - f(x + 1) = 2x + 5$$

barcha $x \in R$ uchun tenglik o‘rinli.

Funksional tenglama (10) bir xil emas (o‘ng tomondagi $2x + 5$ ifodasi “ortiqcha”). Tenglamalarni yechishning umumiy g‘oyasiga muvofiq, uni bir xil yechimga aylantiraylik. Buning uchun biz tenglamaning ma‘lum bir yechimini topamiz. Aslida, bu allaqachon bajarilgan, chunki biz kvadratik funksiyalar sinfiga oid tenglamani yechdik, masalan, $f_0(x) = -x^2 - 4x$ yechim. Endi biz $g(x) = f(x) - f_0(x)$ yangi noma‘lum funksiyaning kiritamiz va (10) uchun funksional tenglamani yozamiz: $g(x) = g(x + 1)$ barcha $x \in R$ uchun.

Ushbu bog‘liqlik butun son satrida aniqlangan davriy funksiya ta‘rifiga to‘g‘ri keladi, $T = 1$ davri bilan. Shunga mos ravishda (5) tenglamaning umumiy yechimi $f(x) = -x^2 - 4x + g(x)$ formula bilan berilgan, bu yerda $g(x) - T = 1$ davri butun davri bo‘yicha aniqlangan ixtiyoriy davriy funksiya.

Yechishning umumiy usuli o‘zgarmasa ham, muhim o‘ziga xos xususiyatlar paydo bo‘ladi. Biz ularni bunday topshiriq misolida ko‘rib chiqamiz.

5 – misol. $x \neq 0; 1$ qiymatlarda $f(x)$ funksiyaning qanoatlantiradigan, x ning barcha qiymatlarini toping:

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x, \quad (11)$$

ekstremumga ega. Ushbu funksiyaning toping.

Oldingi kabi, funksional tenglamani (11) ikkita noma‘lum qatnashgan

$$A = f(x) \text{ va } B = f\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

oddiy tenglama sifatida ko‘rib chiqamiz. x o‘zgaruvchi, bunday holda, parametr rol o‘ynaydi:

$$A + B = x$$

Oxirgi tizimning ikkinchi tenglamasini $(A + x)(6A - x) = 0$ sifatida qayta yozish mumkin. Shuning uchun, har bir tuzatish uchun

$$A + B = x.$$

Yana bitta tenglamani olish uchun (13) da x ni o‘rniga $\frac{1}{1-x}$ qo‘yamiz:

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow B + C = \frac{1}{1-x},$$

bu erda $C = f\left(\frac{x-1}{x}\right)$. A va B o‘zgaruvchilari bilan bir qatorda C uchinchi noma‘lum paydo bo‘ldi.

Yana bitta tenglama bo‘lishi kerak. Shu maqsadda (11) da x ning o‘rnini $\frac{x-1}{x}$ ga almashtiramiz:

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f(x) = \frac{x-1}{x} \Leftrightarrow C + A = \frac{x-1}{x}.$$

Ushbu bosqichda bizning jarayonimiz yopiq bo‘lib, bizda uchta noma'lum qatnashgan uchta tenglamalar sistemasi mavjud

$$\begin{cases} A + B = x, \\ B + C = \frac{1}{1-x} \\ C + A = \frac{x-1}{x} \end{cases}$$

Buni osonlikcha ishlash mumkin. Bizni faqat $A = f(x)$ qiziqtirganligi sababli, uchta tenglamani ham qo'shamiz, yig'indini 2 ga bo'lamiz va undan ikkinchi tenglamani ayiramiz:

$$A = f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{2x(x-1)}, x \neq 0; 1. \quad (12)$$

x , va funksiyalariga nisbatan (9) tenglamaning yechimiga bergan $\frac{1}{1-x}$ va $\frac{x-1}{x}$ bu funksiyalar funksiyalarning superpozitsiyasining ishlashiga nisbatan uchinchi tartibli guruhni tashkil qiladi.

Endi (12) funksiyaning ekstremum nuqtalarini izlashni boshlashingiz mumkin. Uning hosilasi formula bilan berilgan

$$f'(x) = \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1}{2x^2(x-1)^2}.$$

Shuning uchun uni yangi o'zgaruvchi $t = x + \frac{1}{x}$ yordamida almashtirish bajarish mumkin:

$$f(x) = \frac{(x^2 - (1 + \sqrt{2})x + 1) \cdot (x^2 - (1 - \sqrt{2})x + 1)}{2x^2(x-1)^2}.$$

$$x^2 - (1 + \sqrt{2})x + 1$$

ko'phad ikkita haqiqiy ildizga ega.

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2} \in (0; 1)$$

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2} \in (1; +\infty).$$

va $x^2 - (1 - \sqrt{2})x + 1$ ko'phadning diskriminanti manfiy, shuning uchun bu ko'phad barcha x lar uchun musbat va hosilaning ishorasiga ta'sir qilmaydi. Endi, intervallar usuli yordamida hosilaning ishoralarini va shunga mos ravishda $f(x)$ funksiyasining harakatlarini aniqlashimiz mumkin:

$(-\infty; 0]$ oralig'ida o'sadi;
 $[0; x_1]$ oralig'ida o'sadi;
 $[x_1; 1]$ oralig'ida kamayadi;
 $[1; x_2]$ oralig'ida kamayadi;
 $[x_2; +\infty)$ oralig'ida o'sadi;

Shunday qilib, $f(x)$ funksiya ikkita ekstremum nuqtaga ega:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2} \in (0; 1);$$

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2} \in (1; +\infty).$$

6 – misol. Har bir haqiqiy x uchun $f(x)$ sonli funksiya tenglikni qanoatlantiradi

$$x + f(x) = f(f(x)). \quad (13)$$

$f(f(x)) = 0$ tenglamani yeching.

Ushbu misolni ishlash uchun biz *inyeksiya funksiyasi* tushunchasini taqdim etamiz:

Ta'rif. $f(x)$ funksiya inyeksion deb ataladi, agar uning har qanday ikkita x_1, x_2 soni uchun uning aniqlanish sohasidagi $f(x_1) = f(x_2)$ tenglik $x_1 = x_2$ degan ma'noni anglatrsa.

Ko'rinib turibdiki, agar funksiya butun aniqlanish sohasi bo'yicha qat'iy ravishda ko'payib (kamayib) ketayotgan bo'lsa, demak u inyeksiya xususiyatiga ega. Bundan tashqari, u yoki bu funksiyalarning monotonligi ishlatilgan ko'plab misollarda (masalan, tenglamalarni yechishda), inyeksiya ko'pincha talab qilinadi.

Inyektiv funksiyasi atamasi bilan bir qatorda, inyeksiya va bir-biriga mos keladigan atamalar ishlatiladi.

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ munosabat $x_1 \neq x_2$ (x_1, x_2 funksiyani aniqlash sohasiga kiritilgan) $\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ munosabatiga tengdir.

Endi, masalamizga qaytib, ko‘rib chiqilayotgan funksiya inyeksiya ekanligini isbotlaylik. Darhaqiqat, agar $f(x_1) = f(x_2)$ bo‘lsa, unda $f(x)$ uchun tenglamani $x = f(f(x)) - f(x)$ deb yozamiz, bizda

$$x_1 = f(f(x_1)) - f(x_1) = f(f(x_2)) - f(x_2) = x_2$$

mavjud. Endi $f(f(x)) = 0$ tenglama bilan ishlaymiz. Avvalo, uning nechta ildizi bo‘lishi mumkin.

Agar $x_1, x_2, f(f(x)) = 0$ tenglamaning ildizlari bo‘lsa, u holda $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ va $f(x)$ funksiyasining isbotlangan inyeksiyasidan $f(x_1) = f(x_2)$ kelib chiqadi. Inyeksiya xususiyatini yana qo‘llasak, biz $x_1 = x_2$ ni olamiz. Shunday qilib, $f(f(x)) = 0$ tenglamada bir nechta ildiz bo‘lishi mumkin emas. Endi biz x ning o‘rniga 0 sonini qo‘yamiz. Bu quyidagi tenglikni beradi: $f(0) = f(f(0))$. $f(x)$ funksiyasining isbotlangan inyeksionligi tufayli bu $0 = f(0)$, keyin $f(f(0)) = f(0) = 0$, ya‘ni 0 soni $f(f(x)) = 0$ tenglamaning ildizi. 6-masala matnidan (13) funksional tenglamani qanoatlantiradigan funksiyalar mavjudligi kelib chiqsa ham umuman olganda, bu tenglamani yechish mumkin emas, lekin yuqorida tavsiflangan usullardan foydalanib, masalan, ko‘phadlar sinfida (13) tenglama aniq ikkita yechimga ega ekanligini isbotlash mumkin:

$$f_1(x) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}x, \quad f_2(x) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}x$$

Darhaqiqat, agar $f(x)$, $n \geq 1$ darajadagi ko‘phad bo‘lsa, unda (13) tenglamaning chap tomonida n darajali ko‘phad, o‘ng tomonida n^2 darajali ko‘phad mavjud. Bu faqat $n = 1$ holatida mumkin. Shuning uchun biz chiziqli funksiyalarni ko‘rib chiqish bilan cheklanishimiz mumkin: $f(x) = kx + b$. Ular uchun (15) tenglama shaklni oladi

$$x + (kx + b) = k(kx + b) + b$$

barcha x uchun, yoki

$$(k+1)x + b = k^2x + (kb + b)$$

barcha x uchun. Ushbu tenglik mavjud bo‘lgan sistemaga tengdir:

$$\begin{cases} k+1 = k^2 \\ b = kb + b \end{cases}$$

Sistema ikkita yechimga ega: $(k; b) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 0\right), (k; b) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right)$.

(13) funksional tenglamani qanoatlantiradigan, keyingi ikkita chiziqli funksiyaga mos keladi:

$$f_1(x) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}x, \quad f_2(x) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}x. \quad (14)$$

Xulosa. Tahlil qilinayotgan masala qiziq, chunki funksional tenglamani yechish va shu bilan $f(x)$ funksiyasining aniq shaklini aniqlash mumkin emas, lekin asosiy masala $(f(f(x)) = 0)$ tenglamaning yechimi hal qilinmoqda.

Adabiyotlar:

1. Engel A.. Problem-Solving Strategies. Springer-Verlag, New York, 1998.
2. Туманов С.А.. Поиски решения задач. М. «Просвещение», 1969 г.
3. Abduaxmedov A.A., Nasimov H.A., Nosirov U.M., Husanov J.H.. Algebra va matematik analiz asoslari. I-qism, Toshkent, O‘qituvchi nashriyoti, 2001 yil.