№ 3/1(50) 2023

ISSN 2181-8460

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

100125, Toshkent sh., Buz-2, 17A
Tel.: +(99871) 231-92-45
E-mail: journals@airi.uz

RAQAMLI TEXNOLOGIYALAR VA
SUN'IY INTELLEKTNI RIVOJLANTIRISH
ILMIY-TADQIQOT INSTITUTI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 3/1(50) 2023

Журнал основан в 2015 году.
Издается 6 раз в год.

Учредитель:
Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан.
Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Адрес редакции:
100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.
Тел.: +(99871) 231-92-45.
E-mail: journals@airi.uz.
Сайт: journals.airi.uz (www.pvpm.uz).

Дизайн и компьютерная вёрстка:
Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.
Подписано в печать 28.06.2023 г.
Формат 60x84 1/8. Заказ №3. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 3/1(50) 2023

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:
Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.
The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Address:
100125, Tashkent, Buz-2, 17A.
Tel.: +(99871) 231-92-45.
E-mail: journals@airi.uz.
Web: journals.airi.uz (www.pvpm.uz).

Design and desktop publishing:
Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.
Signed for print 28.06.2023
Format 60x84 1/8. Order No. 3. Print run 100 copies.

Содержание

УДК 519.644.2

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ МЕТОДОМ ФИ-ФУНКЦИЙ

Абдуахадов А.А.
alibekabduaxadov@gmail.com
Бухарский государственный университет,
Узбекистан, г. Бухара 200114, ул. М.Икбола, 11.

Посвящается 70-летию со дня рождения профессора Холмата Шадиметова

Численное интегрирование определенных интегралов играет большое роль в фундаментальных и прикладных науках. В зависимости от первоначальных данных и требований на результат вычислений налагаются различные условия на точность приближенного вычисления таких интегралов. Известны классические методы численного вычисления определенных интегралов такие как квадратурные формулы Грегори, Ньютона-Котеса, Эйлера, Гаусса, Маркова и др. Начиная с середини прошлого века начал развыватся теория построения оптимальных формул численного интегрирования основываясь на вариационные методы. Надо отметить, что имеются оптимальные квадратурные формулы в смысле Никольского и Сарда.

В данной работе изучается задача построения оптимальной квадратурной формулы в смысле Сарда. При построении квадратурной формулы используется метод фи-функций. Погрешность формулы оценивается сверху с помощью интеграла от квадрата функции фи из конкретного гильбертово пространства. Далее, выбирается такая фи-функция интеграл от квадрата в данном интервале принимает наименьшее значение. В конце, с помощью полученной фи-функции вычисляются коэффициенты оптимальной квадратурной формулы. Полученная оптимальная квадратурная формула в данной работе является точной на экпоненциалной функциях и на экпоненциалный функциям, где сигма параметр отличный от нулья.

Ключевые слова: Гильбертово пространство, метод фи-функций, оптимальная квадратурная формула, погрешность формулы

Цитирование: *Абдуахадов А.А.* Построение оптимальной квадратурной формулы методом фи-функций // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2023. – № 3/1(50). – С. 100-110.

1 Введение

Многие задачи науки и техники приводят к интегральным и дифференциальным уравнениям или к их системам. Решения таких уравнений часто выражаются через определенные интегралы. В большинстве случаев эти интегралы невозможно вычислять точно. Поэтому требуется вычислить приближенное значение таких интегралов с возможно большой точностью и с малыми затратами.

Задачу нахождения численного значения однократного и многократного интеграла, ввиду известного геометрического значения, часто называют соответственно квадратурой и кубатурой. Имеются различные методы квадратур и кубатур, которые позволяют приближенно вычислить интеграл при помощи конечного числа значений интегрируемой функции. Эти методы являются универсальными, и их можно применять там, где другие методы вычисления оказываются бессильными.

Основываясь на тех или иных идеях и учитывая свойства подынтегральной функции, многие исследователи построили различные квадратурные формулы. Таким образом, появились известные квадратурные формулы Грегори, Ньютона-Котеса, Симпсона, Эйлера, Гаусса, Чебышева, Маркова и др., которые используются в практике и до сих пор.

В настоящее время в теории построении квадратурных и кубатурных формул имеются следующие основные подходы: *алгебраический, вероятностный, теоретико - числовой и функциональный.*

1. *В алгебраическом подходе* надо выбрать узлы и коэффициенты квадратурных и кубатурных формул так, чтобы эти формулы были точны для всех функций некоторого множества F. Учитывая свойства подынтегральной функции, обычно за множество F берутся алгебраические и тригонометрические многочлены, степени которых не превосходят некоторого числа m, или ограниченные рациональные функции.
2. *Вероятностный подход* построения кубатурных формул основывается на методе Монте-Карло.
3. *Теоретико-числовой подход* построения кубатурных формул основывается на методы теории чисел.
4. *Функциональный подход* построения квадратурных и кубатурных формул. В функциональном подходе считают, что подынтегральные функции принадлежат некоторому банахову пространству, и разность между интегралом и приближающей его комбинацией значений подынтегральной функции рассматривается как некоторый линейный непрерывный функционал. Этот функционал называется функционалом погрешности кубатурной формулы, и погрешность формулы оценивается через нормы функционала погрешности. Минимизируя нормы функционала погрешности по параметрам квадратурных и кубатурных формул получают оптимальные формулы численного интегрирования различного смысла.

Так как исследование в настоящей работе относиться к последнему подходу мы приведем обзор результатов по этому направлению.

Построение квадратурных формул и изучение их оценки погрешности, основанные на методах функционального анализа, впервые были даны в научных работах А.Сарда [1, 2] (минимизация нормы функционала погрешности по коэффицентам при фиксированных узлах) и С.М.Никольского [3] (минимизация номы функционала погрешности по коэффициентам и по узлам), а появление теории кубатурных формул связано с научными исследованиями С.Л.Соболева [5].

К задачам минимизации нормы функционала погрешности по коэффициентам и по узлам в различных пространствах в одномерном случае посвящены работы С.М.Никольского, Н.П.Корнейчука, Н.Е.Лушпай, Т.Н.Бусаровой, Б.Боянова, В.П.Моторного, А.А.Лигуна, А.А.Женсыкбаева, К.И.Осколькова, М.А.Чахкиева, Т.А.Гранкиной. Некоторые недавные результаты пополучены, например, в работе А.Бабош, А.М.Аку [6]. Подробные результаты и полная библиография приведена, например, а работе С.М.Никольского [4].

Отметим, что существуют сплайн метод, метод φ-функций и метод Соболева построения оптимальных формул, полученных при минимизации нормы функционала погрешности по коэффициентам при фиксированных узлах. A.Sard [1, 2], L.F.Meyers [7], G.Coman [9, 10], I.J.Schoenberg [11–14], S.D.Silliman [14], P.Köhler [15], основываясь на методе сплайнов, а A.Ghizzetti и A.Ossicini [17], F.Lanzara [16], T.Catinaş и G.Coman [8], используя метод φ-функций построили оптимальные квадратурные формулы в пространстве $L_2^{(m)}$. В построении оптимальных кубатурных формул по методу Соболева результаты С.Л.Соболева [18] по нахождению коэффициентов оптимальных квадратурных формул обобщили вышеупомянутые исследования, в которых был применен метод сплайнов. Реализация предложенного С.Л.Соболевым алгоритма в пространстве $L_2^{(m)}$ велась в научных иседованиях З.Ж.Жамалова, Ф.Я.Загировой, Х.М.Шадиметова, А.Р.Хаётова и др. Недавные результаты по оптимальным формулам полученным по методу Соболева можно найти, например, в работах [19, 20].

Отметим, что результаты данной работы тесно связаны с результатами работ [21–24], которые посвящены к построению оптимальных квадратурных формул по методу Соболева. В частности, наши результаты обобщает результаты недавной работы [25].

2 Постановка задачи

В настоящей работе мы изучаем построение оптимальной квадратурной формулы используя метод φ-функций. В связи с этим рассмотрим квадратурные формулы вида

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f), \tag{1}$$

где A_k и x_k коэффициенты и узлы квадратурной формулы. Пусть узлы формулы расположены на отрезке $[a, b]$ следующим образом

$$a = x_0 < x_2 < ... < x_n = b, \tag{2}$$

$R_n(f)$ – погрешность формулы (1).

Предположим, что подынтегральная функция $f(x)$ из пространства $W_{2,\sigma}^{(1,0)}(a, b)$, где $W_{2,\sigma}^{(1,0)}(a, b)$ это гильбертово пространство абсолютно непрерывных функций, которые квадратично интегрирумы с производным первого порядка на отрезке $[a, b]$. Скалярное произведение любых двух функций $f(x)$ и $g(x)$ из этого пространства определяется следующей формулой

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_a^b (f'(x) + \sigma f(x))(g'(x) + \sigma g(x))dx, \tag{3}$$

где $\sigma \in \mathbb{R}$ и $\sigma \neq 0$. Это пространство снабжена соответствующей нормой

$$\|f(x)\|_{W_{2,\sigma}^{(1,0)}} = \left(\int_a^b (f'(x) + \sigma f(x))^2 dx\right)^{1/2}. \tag{4}$$

Одним из важных задач в теории квадратурных формул эта задача оптимальности квадратурных формул относительно погрешности этой формулы. В настоящей работе мы рассмотрим задачу оптимальности формулы в смысле Сарда. В этом мы пользуемся взаимнооднaзначним соответствием между квадратурными формулами и φ - функций.

Для удобства введем обозначения

$$A = (A_0, A_1, ..., A_n) \text{ и } X = (x_0, x_1, ..., x_n). \tag{5}$$

Определение 1. Квадратурная формула (1) называется *оптимальным в смысле Никольского* в пространстве $W_{2,\sigma}^{(1,0)}$, если величина

$$F_n(W_{2,\sigma}^{(1,0)}, A, X) = \sup_{f \in W_{2,\sigma}^{(1,0)}} |R_n(f)| \tag{6}$$

достигает наименьшего значения относительно A и X, где A и X определены в (5).

Определение 2. Квадратурная формула (1) называется *оптимальным в смысле Сарда* в пространстве $W_{2,\sigma}^{(1,0)}$, если величина

$$F_n(W_{2,\sigma}^{(1,0)}, A) = \sup_{f \in W_{2,\sigma}^{(1,0)}} |R_n(f)| \tag{7}$$

достигает наименьшего значения относительно A при фиксированном X, где A и X определены в (5).

В настоящей работе мы решаем задачу построения оптимальной квадратурной формулы вида (1) в смысле Сарда в пространстве $W_{2,\sigma}^{(1,0)}(a,b)$, т.е. найдем такие коэффициенты формулы (1), которые удовлетворяют условие (7). При этом мы используем метод φ-функций.

Далее, остальная часть данной работы организована следующим образом. В параграфе 3 описывается метод φ-функций построения квадратурных формул вида (1) в пространстве $W_{2,\sigma}^{(1,0)}$ и приводится взаимосвязь между коэффициентами и φ-функций. Параграф 4 посвящена получении φ-функций дающие наименьшее значение погрешности квадратурной формулы вида (1). С помощью полученных φ-функций вычисляются коэффициенты оптимальной квадратурной формулы вида (1).

3 Метод φ - функций построения квадратурных формул в пространстве $W_{2,\sigma}^{(1,0)}$

В данном параграфе мы объясним метод φ - функций построения оптимальных квадратурных формул вида (1) в смысле Сарда в пространстве $W_{2,\sigma}^{(1,0)}$.

Пусть функции $f(x)$ из пространства $W_{2,\sigma}^{(1,0)}(a,b)$ и для данного натурального n узлы рассматриваемой квадратурной формулы расположены как в (5). Тогда для каждого подинтервала $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, ..., n$ рассмотрим функции φ_k, $k = 1, 2, ..., n$ имеющие следующее свойство

$$\varphi_k'(x) - \sigma\varphi_k(x) = 1, \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{8}$$

Тогда функция φ определяется следующим образом

$$\varphi|_{[x_{k-1}, x_k]} = \varphi_k(x), \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{9}$$

То есть сужение функции φ на интервал $[x_{k-1}, x_k]$ равно φ_k.

Введем следующие обозначения

$$I(f) := \int_a^b f(x)dx, \tag{10}$$

$$Q_n(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k). \tag{11}$$

Теперь используя свойство аддитивности определенного интеграла, учитывая равенства (8), из (10) имеем

$$I(f) := \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (\varphi_k'(x) - \sigma\varphi_k(x))f(x)dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Big(\int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_k'(x)f(x)dx - \sigma \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_k(x)f(x)dx \Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Big(\varphi_k(x)f(x)\Big|_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_k(x)f'(x)dx - \sigma \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_k(x)f(x)dx \Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Big(\varphi_k(x)f(x)\Big|_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_k(x)(f'(x) + \sigma f(x)) \Big) dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Big(\varphi_k(x_k)f(x_k) - \varphi_k(x_{k-1})f(x_{k-1}) \Big) - \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_k(x) \Big(f'(x) + \sigma f(x) \Big) dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x_k)f(x_k) - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x_{k-1})f(x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_k(x) \Big(f'(x) + \sigma f(x) \Big) dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x_k)f(x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_{k+1}(x_k)f(x_k) - \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_k(x) \Big(f'(x) + \sigma f(x) \Big) dx =$$

$$= \varphi_n(x_n)f(x_n) + \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_k(x_k)f(x_k) - \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_{k+1}(x_k)f(x_k) - \varphi_1(x_0)f(x_0) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_k(x) \Big(f'(x) + \sigma f(x) \Big) dx.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} I(f) : &= -\varphi_1(x_0)f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \Big(\varphi_k(x_k) - \varphi_{k+1}(x_k) \Big) f(x_k) + \varphi_n(x_n)f(x_n) - \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_k(x) \Big(f'(x) + \sigma f(x) \Big) dx = \\ &= A_0 f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k f(x_k) + A_n f(x_n) + R_n[f]. \end{aligned} \tag{12}$$

Из (12) получим

$$\begin{aligned} A_0 &= -\varphi(x_0), \\ A_k &= \varphi_k(x_k) - \varphi_{k+1}(x_k), \quad k = 1, 2, ..., n-1, \\ A_n &= \varphi_n(x_n) \end{aligned} \tag{13}$$

и погрешность формулы имеет вид

$$\begin{aligned} R_n[f] &= -\sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_k(x) \Big(f'(x) + \sigma f(x) \Big) dx = \\ &= -\int_a^b \varphi(x) \Big(f'(x) + \sigma f(x) \Big). \end{aligned} \tag{14}$$

Замечание 1. Зная функцию φ из (13) можно найти коэффициенты A_k, $k = 0, 1, ..., n$. Такой метод построения квадратурной формулы называется методом φ - функций.

Замечание 2. Из выражения (14) видно, что квадратурная формула (1) точна на функциях, которые являются решением уравнения

$$f'(x) + \sigma f(x) = 0. \tag{15}$$

Далее, в следующем параграфе мы занимаемся вычислением коэффициентов оптимальной квадратурной формулы вида (1) в пространстве $W_{2,\sigma}^{(1,0)}(a, b)$.

4 Задача оптимальности квадратурной формулы вида (1)

В данном параграфе мы обсудим задачу оптимальности квадратурной формулы вида (1) в пространстве $W_{2,\sigma}^{(1,0)}(a, b)$.

Используя неравенство Коши-Шварца для абсолютного значения погрешности (14) квадратурной формулы (1) имеем следующее

$$\begin{aligned} |R_n(f)| &\leqslant \|f'(x) + \sigma f(x)\|_{L_2(a,b)} \left(\int_a^b \varphi^2(x) dx \right)^{1/2} = \\ &= \|f(x)\|_{W_{2,\sigma}^{(1,0)}} \|\varphi(x)\|_{L_2(a,b)}.. \end{aligned} \tag{16}$$

Надо отметить, что здесь задача построение оптимальной квадратурной формулы вида (1) в смысле Сарда в пространстве $W_{2,\sigma}^{(1,0)}(a, b)$ эта задача нахождения коэффициентов $A = (A_0, A_1, ..., A_n)$ (при фиксированных узлах $X = (x_0, x_1, ..., x_n)$ удовлетворяющих условие (2)) дающие наименьшее значение величине

$$F_n(A) = \int_a^b \varphi^2(x) dx. \tag{17}$$

В свою очередь эта задача эквивалентна нахождению функций $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2, ..., n$ удовлетворяющие уравнению (8) и дающих наименьшее значение величине (17) на каждом интервале $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, ..., n$.

Далее, с начала найдем функции $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2, ..., n$ дающие наименьшее значение величине (17) и потом используя формулы (13) вычислим коэффициенты A_k, $k = 0, 1, ..., n$ оптимальной квадратурной формулы (1).

4.1 Нахождение функций φ_k

Теперь занимаемся нахождением функций φ_k на каждом интервале $[x_{k-1}, x_k]$ при $k = 1, 2, ..., n$, являющихся решением уравнения

$$y' - \sigma y = 1. \tag{18}$$

Решение этого уравнения будем искать в виде произведения $y = u y_1$ функций $u(x)$ и $y_1(x)$, где y_1 - решение соответствующего однородного уравнения

$$y' - \sigma y = 0. \tag{19}$$

Легко проверить, что один из решений уравнения (19) имеет вид

$$y_1(x) = e^{\sigma x}. \tag{20}$$

Теперь мы можем решать уравнение (18). По предпорложению решение уравнения (18) имеет вид

$$y(x) = uy_1, \tag{21}$$

где $y_1(x)$ определена равенством (20). Тогда нам достаточно найти функцию $u(x)$. Чтобы найти ее сначала вычислим производное первого порядка неизвестной функции $y(x)$ в (21). Тогда имеем

$$y' = u'y_1 + uy_1'. \tag{22}$$

Подставляя (21) в (18), учитывая (20), мы получим

$$u'e^{\sigma x} + u\sigma e^{\sigma x} - u\sigma e^{\sigma x} = 1.$$

Отсюда

$$u' = e^{-\sigma x}.$$

Интегрируя обе стороны последнего равенства имеем

$$u(x) = -\frac{1}{\sigma}e^{-\sigma x} + C.$$

Значит, с учетом последного равества и (20), для решения (21) уравнения (18) получаем

$$y = -\frac{1}{\sigma} + Ce^{\sigma x}. \tag{23}$$

Далее, на каждом интервале $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, ..., n$ берем функции $\varphi_k(x)$ в виде (23), т.е.

$$\varphi_k(x) = -\frac{1}{\sigma} + C_1^{(k)}e^{\sigma x}, \quad x \in [x_{k-1}, x_k], \; k = 1, 2, ..., n. \tag{24}$$

Отсюда заключаем, что для нахождения функций $\varphi_k(x)$ нам требуется найти такие коэффициенты $C_1^{(k)}$, $k = 1, 2, ..., n$, которые дают наименьшее заначения величине (17) на каждом из интервалов $[x_{k-1}, x_k]$ при $k = 1, 2, ..., n$. Далее, мы найдем такие $C_1^{(k)}$ чтобы интеграл от квадрата функции $\varphi_k(x)$ определенная равенством (24) на интервале $[x_{k-1}, x_k]$ принимал наименьшее значение. В связи с этим рассмотрим следующие функции

$$\mathcal{F}_k(C_1^{(k)}) = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_k^2(x)dx, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

Тогда отсюда, учитывая (24), имеем

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_k(C_1^{(k)}) &= \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \left(-\frac{1}{\sigma} + C_1^{(k)}e^{\sigma x}\right)^2 dx = \\
&= \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{1}{\sigma^2}dx - 2C_1^{(k)}\frac{1}{\sigma}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} e^{\sigma x}dx + +(C_1^{(k)})^2 \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} e^{2\sigma x}dx, \; k = 1, 2, ..., n.
\end{aligned}$$

Тогда вычисляя производные первого порядка от функции $\mathcal{F}_k(C_1^{(k)})$ по $C_1^{(k)}$ и приравнивая ее к нулью, имеем

$$2C_1^{(k)}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} e^{2\sigma x}dx - \frac{2}{\sigma}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} e^{\sigma x}dx, \; k = 1, 2, ..., n.$$

Откуда получаем

$$C_1^{(k)} = \frac{\frac{1}{\sigma}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} e^{\sigma x}dx}{\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} e^{2\sigma x}dx} = \frac{2}{\sigma\left(e^{\sigma x_k}+e^{\sigma x_{k-1}}\right)},\ k=1,2,...,n. \qquad (25)$$

Легко проверить, что эти значение $C_1^{(k)}$ дает наименьшее значение функции $\mathcal{F}_k(C_1^{(k)})$ на интервале $[x_{k-1},x_k]$. Тогда, учитывая (25), из (24) имеем

$$\varphi_k(x) = -\frac{1}{\sigma}+\frac{2e^{\sigma x}}{\sigma\left(e^{\sigma x_k}+e^{\sigma x_{k-1}}\right)},\quad x\in[x_{k-1},x_k],\ k=1,2,...,n. \qquad (26)$$

4.2 Вычисление коэффициентов оптимальной квадратурной формулы вида (1)

Теперь, используя (26), из формул (13) вычислим коэффициенты A_k, $k=0,1,...,n$ оптимальной квадратурной формулы вида (1).

Сначала вычислим A_0. Тогда из (13), с учетом $\varphi_1(x)$, имеем

$$A_0 = -\varphi_1(x_0) = -\left(-\frac{1}{\sigma}+\frac{2e^{\sigma x_0}}{\sigma\left(e^{\sigma x_1}+e^{\sigma x_0}\right)}\right) = \frac{e^{\sigma x_1}-e^{\sigma x_0}}{\sigma\left(e^{\sigma x_1}+e^{\sigma x_0}\right)}. \qquad (27)$$

Теперь вычислим коэффициенты A_k, $k=1,2,...,n-1$. Тогда из (13), с учетом $\varphi_k(x)$ при $k=1,2,...,n-1$, имеем

$$\begin{aligned} A_k &= \varphi_k(x_k)-\varphi_{k+1}(x_k) = \\ &= \left(-\frac{1}{\sigma}+\frac{2e^{\sigma x_k}}{\sigma\left(e^{\sigma x_k}+e^{\sigma x_{k-1}}\right)}\right)-\left(-\frac{1}{\sigma}+\frac{2e^{\sigma x_k}}{\sigma\left(e^{\sigma x_{k+1}}+e^{\sigma x_k}\right)}\right) = \\ &= \frac{2e^{\sigma x_k}\left(e^{\sigma x_{k+1}}-e^{\sigma x_{k-1}}\right)}{\sigma\left(e^{\sigma x_{k+1}}+e^{\sigma x_k}\right)\left(e^{\sigma x_k}+e^{\sigma x_{k-1}}\right)}. \end{aligned} \qquad (28)$$

Наконец, вычислим последний коэффициент A_n. При этом из (13), с учетом (26), получаем

$$A_n = \varphi_n(x_n) = -\frac{1}{\sigma}+\frac{2e^{\sigma x_n}}{\sigma\left(e^{\sigma x_n}+e^{\sigma x_{n-1}}\right)} = \frac{e^{\sigma x_n}-e^{\sigma x_{n-1}}}{\sigma\left(e^{\sigma x_n}+e^{\sigma x_{n-1}}\right)}. \qquad (29)$$

Таким образом, суммируя результаты (27), (28) и (29), мы получаем следующую основную теорему данной работы.

Теорема 1. В пространстве $W_{2,\sigma}^{(1,0)}(a,b)$ при каждом фиксированном натуральном n, существует единственная оптимальная в смысле Сарда квадратурная формула вида

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f)$$

с коэффициентами

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \frac{e^{\sigma x_1} - e^{\sigma x_0}}{\sigma(e^{\sigma x_1} + e^{\sigma x_0})},\\
A_k &= \frac{2e^{\sigma x_k}(e^{\sigma x_{k+1}} - e^{\sigma x_{k-1}})}{\sigma(e^{\sigma x_{k+1}} + e^{\sigma x_k})(e^{\sigma x_k} + e^{\sigma x_{k-1}})},\ k = 1, 2, ..., n-1,\\
A_n &= \frac{e^{\sigma x_n} - e^{\sigma x_{n-1}}}{\sigma(e^{\sigma x_n} + e^{\sigma x_{n-1}})}.
\end{aligned}
$$

при фиксированных узлах $x_k,\ k = 0, 1, ..., n$ удовлетворяющие неравенство $a = x_0 < x_1 < ... < x_x = b$.

Замечание 3. Надо отметить, что при $[a, b] = [0, 1]$ и $x_k = kh$, где $k = 0, 1, ..., N,$, $h = 1/N$ из теоремы 1 получаем результать работы [25].

5 Заключение

В данной работе мы построили оптимальную квадратурную формулу в пространстве $W_{2,\sigma}^{(1,0)}(a, b)$, где $W_{2,\sigma}^{(1,0)}(a, b)$ – гильбертово пространство абсолютно непрерывных функций и производные первого порядка которых интегрируемы с квадратом на интервале $[a, b]$. Здесь квадратурная сумма состоит из линейной комбинации значений $f(x_k)$ функции $f(x)$ в узлах $x_k \in [a, b]$, где $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Погрешность рассматриваемой квадратурной формулы оценивается сверху с помощью произведения нормы подынтегральной функции и L_2- нормы специальной φ - функции из пространства $W_{2,\sigma}^{(1,0)}(a, b)$. При этом эта φ функция определяется с точностью до неизветсного множителья на каждом подинтервале. Оптимальная квадратурная формула получается за счет выбора этих множителей, которые предоставляет наименьшее значение L_2- нормы φ - функции. В данной работе нами найдены такая φ - функция. Используя эту φ - функцию явно найдены коэффициенты оптимальной квадратурной формулы. Полученная квадратурная формула является точной для функций $e^{\sigma x}$ и $e^{-\sigma x}$. В частности, из результатов данной работы получаются известные результаты.

Литература

[1] *Sard A.* Best approximate integration formulas, best approximate formulas // American J. of Math., 1949. LXXI. – P. 80–91.

[2] *Sard A.* Linear approximation / — 2nd ed —, American Math. Society, Province, Rhode Island, 1963.

[3] *Никольский С.М.* К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами // Успехи матем. наук, – Москва, 1950. -Т.5. - №3. - С. 165–177.

[4] *Никольский С.М.* Квадратурные формулы / — 4-ое изд —, Москва: Наука, – 1988. – 256 с.

[5] *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул / – Москва: Наука. – 1974. – 808 с.

[6] *Baboş A., Acu A. M.* Note on Corrected Optimal Quadrature Formulas in the Sense Nikolski // Applied Mathematics and Information Sciences an International Journal, – 2015. – vol. 9, – no. 3, – P. 1231–1238.

[7] *Meyers L.F., Sard A.* Best approximate integration formulas // J. Math and Phys., – 1950. XXIX. – P. 118–123.

[8] *Catinaş T., Coman G.* Optimal quadrature formulas based on the φ-function method // Stud. Univ., Babeş-Bolyai Math., – 2006. – vol. 51 (1). – P. 49–64.

[9] *Coman G.* Formule de cuadrature de tip Sard // Stud. Univ., Babeş-Bolyai Math.-mech., – 1972. – vol.17. – no.2. – P. 73–77.

[10] *Coman G.* Monoplines and optimal quadrature Formule // Rend. mat., – 1972. – vol. 5. – № 3. – P. 567–577.

[11] *Schoenberg I.J.* On trigonometric spline interpolation // J. Math. Mech., – 1964. – vol.13. – P. 795–825.

[12] *Schoenberg I.J.* On monosplines of least deviation and best quadrature formulae // J. Soc. Indust. Appl. Math. Ser. B Numer. Anal., – 1965. – vol.2. – P. 144–170.

[13] *Schoenberg I.J.* On monosplines of least square deviation and best quadrature formulae II // SIAM J. of Numer. Anal., – 1966. – vol.3. – P. 321–328.

[14] *Schoenberg I.J., Silliman S.D.* On semicardinal quadrature formulae // Math. Comp. – 1973. – vol.126. – P. 483–497.

[15] *Köhler P.* On the Weights of Sard's Quadrature Formulas // Calcolo, – 1988 – vol.25. – №3. – P. 169–186.

[16] *Lanzara F.* On optimal quadrature formulae // Journal of Ineq. Appl. – 2000. – vol. 5. – P. 201–225.

[17] *Ghizzetti A., Ossicini A.* Quadrature Formulae / Academie Verlag. - Berlin, 1970.

[18] *Соболев С.Л.* Коэффициенты оптимальных квадратурных формул // Докл. АН СССР, – Москва, – 1977. – Т.235. – no. 1. – С. 34–37.

[19] *Шадиметов Х.М.* Оптимальные решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространстве Соболева / – Ташкент, «Фан ва технология», – 2019. – 223 с.

[20] *Шадиметов Х.М., Хаётов А.Р.* Оптимальная аппроксимация функционалов погрешностей квадратурных и интерполяционных формул в пространствах дифференцируемых функций. / – Ташкент, «Muhr Press», – 2022. – 247 с.

[21] *Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R.* Optimal quadrature formulas in the sense of Sard in $W_2^{(m,m-1)}$ space // Calcolo, Springer, – 2014. – vol. 51. – no. 2, – P. 211–243.

[22] *Boltaev N.D., Hayotov A.R., Khudayberdiev M.* Optimal quadrature formula for approximate calculation of Fourier coefficients in $W_2^{(1,0)}$ space // Problems of Computational an Applied Mathematics, – Tashkent, – 2015. – vol.1, – no. 1, – P. 71–77.

[23] *Boltaev N.D., Hayotov A.R., Milovanović G.V., Shadimetov Kh.M.* Optimal quadrature formulas for numerical evaluation of Fourier coefficients in $W_2^{(m,m-1)}$ // Journal of Applied Analysis and Computation, – 2017. – vol. 7, – no. 4, – P. 1233–1266.

[24] *Hayotov A.R., Rasulov R.G.* The order of convergence of an optimal quadrature formula with derivative in the space $W_2^{(1,0)}$ // Filomat, – 2020. – vol. 34, – no. 11, – P. 3835–3844.

[25] *Hayotov A.R., Kuldoshev H.M.* An optimal quadrature formula with sigma parameter // Problems of Computational and Applied Mathematics, Tashkent, – 2023. – no. 2/1(48), – P. 7–19.

Поступила в редакцию 20.05.2023