Journal of New Century Innovations

VOLUME 7
ISSUE-5

Journal of new century innovations

AREAS

Exact and natural sciences

Pedagogical sciences

Social sciences and humanities

Engineering and Medical Sciences

JOURNAL OF NEW CENTURY INNOVATIONS

IN ALL AREAS

ОБ ОДНОМ МЕРЕ, ПОРОЖДЕННОЙ ОДНИМ КЛАССОМ КВАДРАТИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ

***Мухитдинов Рамазон Тухтаевич*,**
физико-математический факультет,
Бухарский государственный университет
Жураев Илер Илес угли,
магистр, физико-математический факультет,
Бухарский государственный университет

Аннотация. В настоящей статье определен класс менделевских операторов и для этого класса операторов дается конструкция мер, названных менделевскими. Актуальность изучаемой исследование объясняется тем, что одной из важной проблемы, как в теории меры, так и в теории вероятностей является задача построения меры P на Ω, согласованной с мерой m на E.

Ключевые слова: теория вероятностей, мера, конечномерные распределения, алгебра, последовательность, бесконечность, множества, вероятностная мера, конструкция, семейство, прямое произведение, подмножества.

ONE MEASUREMENT GENERATED BY A ONE CLASS OF QUADRATIC OPERATORS

Muxitdinov Ramazon Tuxtaevich,
Faculty of Physics and Mathematics,
Bukhara State University
Juraev Ilyor Ilyos ugli,
Master Student, Faculty of Physics and Mathematics,
Bukhara State University

Annotation. In this article, a class of Mendelian operators is defined, and for this class of operators, a construction of measures, called Mendelian, is given. The relevance of the study under study is explained by the fact that one of the important problems, both in measure theory and in probability theory, is the problem of constructing a measure P on Ω consistent with the measure m on E.

Keywords: probability theory, measure, finite-dimensional distributions, algebra, sequence, infinity, sets, probability measure, construction, family, direct product and subsets.

Понятие квадратичного оператора, по-видимому, впервые было сформулировано в работе Бернштейна С.Н. «Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности» (Бернштейн С.Н. Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности: Учебные записи н.-и. кафедр Украины, отд. Математики, 1924 г., Выпуск 1. с.83-115). Рассмотрим некоторую биологическую популяцию, т.е. замкнутое относительно размножения сообщество организмов. Предположим, что каждая особь, входящая в популяцию принадлежит некоторой (единственной) из n разновидностей $1,2,\ldots.,n$. Шкала разновидностей («признаков», фенотипов, генотипов) должна быть такой, чтобы разновидности родителей i,j однозначно определяли вероятность каждой разновидности k для непосредственного потомка первого поколения. Обозначим эту вероятность («коэффициент наследственности») через $P_{i,j,k}$. Очевидно, что в этом случае выполнены условия:

$P_{i,j,k} \geq 0$,

$$\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} P_{ij,k} = 1$$

и $P_{i,j,k} = P_{j,i,k}$ для всех i,j,k.

Предположим, что популяция настолько велика, что можно пренебречь флюктуациями частот. Тогда её состояние можно описывать набором $x = (x_1, x_2, \ldots.., x_n)$ вероятностей разновидностей, т.е. x_i есть доля разновидности i

в популяции. При так называемой панмиксии, или случайном скрещивании, при фиксированном состоянии $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ родительские i, j пары образуются с вероятностью $x_i\ x_j$ и, следовательно,

$$x'_k = \sum_{k=1}^{n} P_{ij,k}\, x_i\, x_j$$

будет полной вероятностью разновидности k среди непосредственных потомков.

Множество

$$S^{n-1} = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n):\ x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$$

называется $n - 1$ - мерным симплексом и так как

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} x'_{\mathrm{k}} = 1$$

и $x'_k \geq 0$ для любого $k = 1, 2, \ldots., n,$ то это отображение называемое квадратичным, переводит симплекс S^{n-1} в себя.

В настоящей статье дадим определение класса одного квадратичных операторов (квадратичные операторы, для которых правила наследования согласуются с законами Менделя. Г.Мендель - чешско-австрийский биолог-ботаник, основоположник учения о наследственности). Изучены эргодические свойства соответствующих квадратичных мер, то есть для менделевских операторов. Также для этого класса операторов дается подробное конструкция мер. Изучены способа построения семейства функций $P_n(i_1, i_2, i_3, \ldots., i_k)$ (схемы Бернульи и Маркова).

Принципы биологического наследования, открытые Менделем в 1865 г., допускают, как известно, точную математическую формулировку. По этой причине классическая генетика может рассматриваться как математическая дисциплина.

Основная концепция классической генетики — ген — была введена Менделем с целью объяснения статистических свойств наследования элементарного биологического признака. Согласно более поздней хромосомной теории, развитой школой Моргана, гены являются структурными элементами хромосом — особых нитевидных образований, находящихся в ядрах клеток организма. Место, занимаемое геном в хромосоме, называется локусом (этого гена). Схематически можно представлять себе хромосому как прямолинейный отрезок, а локусы — как последовательные участки, на которые этот отрезок разбит. Их число весьма велико (например, $10^4 \div 10^5$ у человека). Каждая хромосома принадлежит некоторому семейству гомологичных хромосом.

Гомологичные хромосомы внешне выглядят одинаково и число локусов у них одно и то же, но соответственные локусы могут быть заполнены как одинаковыми, так и разными генами. О таких генах — партнерах говорят, что они аллельны, или являются аллелями друг друга. По происхождению один из них является диким, а остальные — его мутантами. Химические различия между аллельными генами обычно незначительны, но биологические последствия этих различий могут быть весьма значительными. Будем отождествлять соответственные локусы («идентичные места») гомологичных хромосом и, тем самым, будем относить аллельные гены к одному локусу. Два локуса, относящиеся к одной и той же хромосоме, называются сцепленными. Вся наследственная информация, поступающая к потомкам, заключена в тех генах, которые находятся в родительских половых клетках, сливающихся при оплодотворении. Половая клетка, или гамета, содержит набор хромосом, в котором (если отвлечься от некоторых аномалий) хромосомы попарно негомологичны. Такой набор хромосом называется гаплоидным. Хромосомные наборы различных гамет одного и того же биологического вида гомологичны. При слиянии двух гамет образуется зигота (соматическая клетка), содержащаяся, очевидно, по две гомологичные хромосомы. Такой набор хромосом называется диплоидным. Все клетки живого организма, за исключением гамет, производимых на стадии половой зрелости (и некоторых специализированных клеток), по хромосомному составу тождественны первоначальной зиготе. Это единообразие обеспечивается механизмом митоза — процесса клеточного деления, в котором диплоидный хромосомный набор клетки сначала воспроизводит свою копию, а затем два идентичных диплоидных набора расходятся по двум дочерним клеткам. Напротив, гаметы, производимые данным организмам, образуются в процессе деления другого рода — в мейозе, который схематически можно представлять себе как процесс расхождения гомологичных хромосом по двум дочерним клеткам. При этом весьма существенно, что в каждой паре гомологичных хромосом распределение по дочерним гаметам происходит независимо от распределения в других парах. Отсюда ясно, что, в отличие от соматических клеток, совокупность гамет, производимых данным организмом, генетически весьма неоднородна. Если число хромосом в гаплоидном наборе равно N (для человека $N = 23$), то число генетически различных гамет, которые могут быть произведены данным организмом, равно 2^N (2^{23} $==$ $8\,388\,608$). Здесь еще не учтена рекомбинация генов в результате так называемого кроссинговера, который невообразимо (для человека — в $\sim 10^{23}$ раз) усиливает потенциальное генетическое разнообразие гамет (http://www.mathnet.ru/links/13e4c67787336206e0e0ed622f3dc4df/rm5253.pdf).

В простейшей ситуации, исследованной Менделем, играл роль лишь один диаллельный локус, т. е. наделенный ровно двумя аллельными генами A, a. Здесь возможны две гаметы A, а ж три зиготы $AA, aa, Aa = aA$. При этом AA, аа называются гомозиготами, Aa — гетерозиготной.

В простейших случаях фенотипы определяются отношением доминирования между генами. Если ген A доминирует над a (A — доминант, a — рецессив), то генотипы AA и Aa определяют один и тот же фенотип (например, желтый цвет семян гороха), а генотип aa определяет другой фенотип (например, зеленый цвет семян). Этим объясняется эффект расщепления признака у потомства (например, в опытах Менделя по скрещиванию между собой желтосемянных растений Aa).

Харди (G. N. Hardy , Mendelian proportions in a mixed population, Science 28 (1908), 49-50.) и Вайнберг (W. Weinberg , Uber den Nachweis der Vererbung beim Menschen, Jahreshefte Verein f. Vaterl. Naturk. in Wiirtemberg 64 (1908), 368-383.)

в 1908 г. описали множество равновесных состояний менделевской популяции зигот. Сейчас этот результат выглядит тривиально, однако он сыграл выдающуюся роль в развитии математической генетики и, кроме того, он и в настоящее время является одним из основных средств генетико-статистического анализа реальных популяций.

Отметим, что фундаментальные законы Менделя Г., сформулированные на языке, весьма близком к математическому, привлекли внимание математиков к изучению задач, возникающих в биологии и, в частности, популяционной генетике (Вольтерра В., Бернштейн С.Н., Колмагоров А.Н., Феллер В. и др.) Алгебраическому и вероятностному направлениям в популяционной генетике посвящена многочисленная литература. Представляется актуальным детальное изучение различных моделей наследования, возникающих в биологии. В прикладных задачах важны вопросы изучения крайних точек множества квадратичных операторов и сюръективных квадратичных операторов (Etherington M.H., Commutative train algebras of ranks 2 and 3 // J. Lond. Math. Soc. 15, 1940 г., стр.136-148.).

Одной из важных топологических задач является задача выяснения, при каких условиях на преобразование одного множества и другое оно переводит границу в границу, крайние точки в крайние точки и т.д. Описание условий, при которых преобразование множества я себя является сюръективным, относясь к этому классу задач, важно также при изучении биологических моделей. Так, сюръективность квадратичного оператора гарантирует, что какая-либо траектория квадратичного оператора проходит через любую наперед заданную точку симплекса, или на языке моделей, выбрав какое-либо начальное распределение на множестве разновидностей, через некоторое число шагов можно полупить произвольное распределение (Ганиходжаев Н.Н., Мейлиев Х.Ж. Об одной конструкции квадратичных оператров // ДАН РУз, 1997 г., №5, стр. 7-11).

Теперь более подробно рассмотрим меру, порожденной одной квадратичной оператором.

Пусть (E, m) произвольное пространства с мерой. Рассмотрим пространство

$$\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} E_i,$$

где

$$E_i = E$$

для всех натуральных i.

Одной из важных проблем как в теории меры, так и в теории вероятностей является задача построения меры P на Ω, согласованной с мерой m на E Для этого достаточно по теорема Колмогорова (Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. Москва, Наука, 1936 г., 205 с.) задать согласованное семейство конечномерных распределений. Так как эта конструкция необходима нам для дальнейшего изложения, приведем ее для случая конечного множества Е. (Биллинглей П. Эргодическая теория и информация. Москва, Мир, 1969 г., 238 с.).

Пусть $\mathrm{E} = \{1,2, \dots \dots, n\}$ и $m(\{i\}) = p_i$ – вероятностная мера на E, т.е. $p_i \geq 0$ и

$$\prod_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Пусть

$$\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} E_i,$$

где $E_i = E$. Произвольный элемент множества Ω является бесконечной последовательностью $w = (w_1, w_2, w_3, \dots.)$ элементов множества Е.

Пусть $\xi_n -$ функция, ставящая в соответствие точке $w \in \Omega$ значения w_n её $n -$ й координаты. Функцию ξ_n называют $n -$ й координатной функцией. Пусть $\mathcal{F} - \sigma$ алгебра, порожденная совокупностью всех конечномерных цилиндров, т.е. множеств вида

$$\{\, w: (\, \xi_n(w), \xi_{n+1}(w), \dots \dots, \xi_{n+k-1}(w)) \in A \,\},$$

$$\{ w: (\xi_n(w), \xi_{n+1}(w), \dots \dots, \xi_{n+k-1}(w)) \in A \},$$

где A — подмножества прямого произведения

$$E^k = \prod_{i=1}^{k} E.$$

Эта σ —алгебра $\mathcal{F}$ порождается также совокупностью всех «тонких» цилиндров, т.е. множеств вида

$$\{ w: \xi_n(w) = i_1, \xi_{n+1}(w) = i_2, \dots \dots, \xi_{n+k-1}(w) = i_k \}$$

где i_l элементы множества E, n$\leq l < n + k$. т.е. цилиндрическое множества называется тонким, если его основание A является одноточечным подмножеством соответствующего конечного прямого произведения.

В силу этого замечания мера P на $(\Omega, \mathcal{F})$ однозначно определяется своими значениями

$$P_n(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k) =$$

$$= P\{ w: \xi_n(w) = i_1, \xi_{n+1}(w) = i_2, \dots \dots, \xi_{n+k-1}(w) = i_k \}$$

на этих цилиндрах, где n — номер первой фиксированной координаты тонького цилиндра и k – размерность цилиндра. По теореме Колморова (Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. Москва, Наука, 1936 г., 205 с.)], если для множества функций $P_n(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k)$ справедливы следуюшие условия согласования

$$\begin{cases} P_n(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k) \geq 0, \\ \sum_{i=1}^{N} P_n(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k, l) = P_n(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k), & (1) \\ \sum_{i=1}^{N} P_n(i) = 1, & (2) \end{cases}$$

при всех k, n и $i_l \in E, 1 \leq l \leq k$, то существует единственная вероятностная мера P на $\mathcal{F}$, для которой имеет место (1) Кроме того, если

$$P_n(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k) = \sum_{i=1}^{N} P_n(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k) \quad (3)$$

при всех $k, n,$ и $i_l \in E, 1 \leq l \leq k,$ то мера P сохраняется при преобразовании сдвига.

Таким образом, основную сложность при построении меры P на $\mathcal{F}$ составляет указание способа задания семейства функций $\{P_n(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k)\}$, n и k натуральные$\}$, удовлетворяющих условию (2). Наиболее польно изучены следующие два способа построения семества функций $P_n(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k)$.

1. Схема Бернулли. Сначала дадим общую схему Бернулли, далее ее применение к нашим задачам.

На практике приходится сталкиваться с такими задачами, которые можно представить в виде многократно повторяющихся испытаний, в результате каждого из которых может появиться или не появиться событие. При этом интерес представляет исход не каждого «отдельного испытания, а общее количество появлений события в результате определенного количества испытаний. В подобных задачах нужно уметь определять вероятность любого числа появлений события в результате испытаний. Рассмотрим случай, когда испытания являются независимыми и вероятность появления события в каждом испытании постоянна. Такие испытания называются повторными независимыми.

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}$$

или

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Эту формулу называют формулой Бернулли, а повторяющиеся испытания, удовлетворяющие условию независимости и постоянства вероятностей появления в каждом из них события , называют испытаниями Бернулли, или схемой Бернулли.

Пусть $m(\{i\}) = p_i$ распределения на $E = \{1,2, \dots, N\}$.

Если положить

$$P_n(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k) = p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot p_{i_3} \cdot \dots \cdot p_{i_k} \tag{4}$$

т.е.

$$P_n(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_k)$$

не зависит от n, то имеют место соотношения (2), (3). Соответствующая (4) мера Р называется бернуллиевский и в этом случае последовательность случайных величин $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует цепь Бернулли, т.е. последовательность независимых одинаково распределенных случайних величин.

2. Схема Маркова. Пусть $\Pi = (p_{ij})_{i,j=1}^{N}$ стохастическая по строкам матрица. Если положить

$$P_n(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_k) = p_{i_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_{k-1}\, i_k}, \qquad (5)$$

т.е. $P_n(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_k)$ не зависит от n, то имеют место соотношения (2). Соответствующая (5) мера Р называется марковской. Если вектор вероятностей

$$P_n(p_1, p, p, \ldots, p)$$

удовлетворяет условию $P\ \Pi = P$, то будеть иметь место соотношение (3).

В этом случае последовательность случайных величин $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует стационарную цепь Маркова.

Цепь Маркова — последовательность случайных событий с конечным или счётным числом исходов, где вероятность наступления каждого события зависит только от состояния, достигнутого в предыдущем событии. Характеризуется тем свойством, что, говоря нестрого, при фиксированном настоящем будущее независимо от прошлого. Названа в честь Маркова А.А. (старшего), который впервые ввёл это понятие в работе 1906 года.

Как известно, если цепь неразложима и ациклична, то все траектории стремятся к некоторому (одному и тому же) состоянию х. Если цепь неразложима и циклична, то каждая траектория «наворачивается» на некоторый предельный цикл, вообще говоря, отличный от точки. Каждый предельный цикл является конечной чисто периодической траекторией, и не существует конечных траекторий, обладающих предпериодом. Последние появляются в случае разложимых цепей, для которых, однако, по-прежнему все траектории стремятся к предельным циклам. Таким образом, даже в простейших (по существу, линейных) примерах обнаруживается значительное разнообразие в поведении траекторий.

Идея изучения и об извлечении асимптотического поведения цепи Маркова из свойств спектра соответствующего стохастического оператора появилась очень давно и успешно использовалась многими авторами для достаточно просто устроенных цепей Маркова (например, для цепей с конечным числом состояний). Изучение спектров стохастических операторов более сложных цепей Маркова (с бесконечным числом состояний) и его применение для исследования асимптотических свойств цепей началось не очень давно. Стохастические операторы таких более сложных цепей действуют в бесконечномерных пространствах и их спектры часто имеют сложную структуру. Я буду рассматривать здесь спектры марковских процессов (полей) трех классов.

Необходимо отметить, что многие из вышеупомянутых процессов Маркова могут быть необратимыми и, следовательно, их стохастические операторы (рассмотренные в гильбертовом пространстве, порожденном инвариантной мерой соответствующего процесса) не являются самосопряженными. Этот факт создает дополнительные осложнения при исследовании их спектра (Минлос Р. А. Спектры стохастических операторов некоторых процессов Маркова и их асимптотическое поведение. Алгебра и анализ, 1996 г., том №8, выпуск №2, стр. 142-156).

В работе (Саримсаков Т.А., Ганиходжаев Р.Н. Эргодический принцип для квадратичных стохастических операторов // Изв. АН.УзССР, 1979 г., №6) был предложен новый способ построения семейства функций

$$P_m(i_1, i_2, i_3, \dots., i_k)$$

основанный на применении квадратичных операторов.

Пусть $E = \{1,2, \dots\dots, N\}$ - конечное множество

$$S^{N-1} = \{(x_1, x_2, \dots., x_N): x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{N} x_i = 1\} - N - 1$$

мерный симплекс.

Квадратичный оператор V, определенный на симплексе S^{N-1}, задается кубической матрицей $\{p_{ij,k}\}_{i,j,k=1}^{N}$, удовлетворяющей следующим условиям:

а) $p_{ij,k} \geq 0$ для всех i, j, k от 1 до N;

б) $p_{ij,k} = p_{ji,k}$ для всех i, j, k;

с) $\sum_{k=1}^{N} p_{ij,k} = 1$ для всех i, j.

Для квадратичного оператора $V: S^{N-1} \to S^{N-1}$ и произвольной точки симплекса $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0) \in S^{N-1}$ положим $x^{(k+1)} = Vx^{(k)}$.

На одномерных цилиндрических множества функции $P_n(i)$ определим следующим образом:

$$P_n(i) = x_i^{(n-1)} \tag{6}$$

для всех натуральных n и $i \in E$. Так как

$$x^n \in V^n(S^{N-1}) \subset S^{N-1}$$

конструкция становится более простой, если квадратичный оператор V сюръективен, т.е. когда

$$V^n(S^{N-1}) = S^{N-1}.$$

Очевидно, из (6) следует

$$\sum_{i=1}^{N} P_n(i) = 1,$$

так как $x^{(n-1)} \in S^{N-1}$.

Таким образом, одно из условий (2) имеет место.

Для произвольных тонких цилиндров функции $P_n(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k)$ при $k > 1$ определим следующим образом:

$$P_n(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k) =$$

$$= x_{i_1}^{(n)} \sum_{m_1 \dots m_{k-1}=1}^{N} P_{i_1 m_1, i_2} \cdot P_{i_2 m_2, i_3} \cdot \dots \cdot$$

$$\cdot P_{i_{k-1} m_{k-1}, i_k} \, x_{m_1}^{(n)} \, x_{m_2}^{(n+1)} \dots x_{m_{k-1}}^{(n+k-1)}. \tag{7}$$

По построению функции (6)-(7) зависят не только от n, k, а также зависят от выбора начального распределения $x^{(0)} \in S^{N-1}$ на E. Первое из условий (2) очевидно. Покажем справедливость второго условия:

$$\sum_{i=1}^{N} P_n(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k,, i) =$$

$$= x_{i_1}^{(n)} \sum_{m_1,\dots,m_k,i=1}^{N} P_{i_1 m_1, i_2} \cdot P_{i_2 m_2, i_3} \dots P_{i_{k-1} m_{k-1}, i_k} P_{i_k m_k, i} \cdot$$

$$\cdot x_{m_1}^{(n)} x_{m_2}^{(n+1)} \dots x_{m_k}^{(n+k)} = x_{i_1}^{(n)} \sum_{m_1,\dots,m_{k-1},i=1}^{N} P_{i_1 m_1, i_2} \cdot$$

$$\cdot P_{i_2 m_2, i_3} \dots P_{i_{k-1} m_{k-1}, i_k}, x_{m_1}^{(n)} x_{m_2}^{(n+1)} \dots x_{m_{k-1}}^{(n+k-1)} =$$

$$= P_n(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k),$$

так как

$$\sum_{i=1}^{N} P_{i_k m_k, i} = 1 \text{ и } \sum_{i=1}^{N} x_{m_k}^{(n+k)} = 1.$$

Таким образом, существует единственная мера P, определенная функциями (6)-(7), которую естественно назвать мерой, порожденной квадратичным оператором V и начальным распределением $x^{(0)} \in S^{N-1}$.

Задача изучения свойства мер, порожденных квадратичными операторами, достаточно сложна и требует громоздких вычислений. В этой работа мы ограничимся изучением мер, соответствующих двум квадратичным оператором, которые описывают некоторые модели наследственной передачи.

Определяем класс квадратичных операторов, для которых изучены эргодические свойства соответствующих квадратичных мер. Квадратичные операторы, для которых правила наследования согласуются с законами Менделя, назовем менделевскими квадратичными операторами. Окажется, что при $n = 2$ определяется единственный менделевский оператор, далее которой рассматривается конструкция мер, порожденной этим квадратичным оператором.

В модели наследственной передачи, порожденной Элстоном и Стьюартом (Ганиходжаев Р.Н, Сарымсаков А.Т О нерастягивающих квадратичных стохастических операторах // ДАН УзССР, 1988 г., №7, стр.3-7), передача признака от родителей к потомству описывается тремя показателями вероятности этой передачи:

$$\begin{cases} P_{AA,A} - \text{от родителя с генотипом АА ребенку передается} \\ \qquad \text{аллель А}, P_{AA,a} = 1 - P_{AA,A} \\ P_{Aa,A} - \text{от родителя с генотипом Аа ребенку передается} \\ \qquad \text{аллель А}, P_{Aa,a} = 1 - P_{Aa,A} \\ P_{aa,A} - \text{от родителя с генотипом аа ребенку передается} \\ \qquad \text{аллель А}, P_{aa,a} = 1 - P_{aa,A} \end{cases} \quad (8)$$

В соответствии с гипотезой о менделевском типе наследования вероятности (8) определены следующим образом:

$$\begin{cases} P_{AA,A} = 1 \; P_{Aa,A} = \frac{1}{2} \; P_{aa,A} = 0 \\ P_{AA,a} = 0 \; P_{Aa,a} = \frac{1}{2} \; P_{aa,a} = 1 \end{cases} \quad (8')$$

Квадратичный оператор (8), определенный на

$$S^1 = \{(x_1, x_2) \colon x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \; x_1 + x_2 = 1\},$$

естественно назвать менделевским квадратичным операторов, а меры, соответствующие таким оператором, назвать-менделевским квадратичными мерами. В этой статье изучаются эргодические свойства менделевских квадратичных мер.

Пусть x_1, x_2 − частоты аллелей А и а соответственно. Тогда $x = (x_1, x_2) \in S^1$.

Для менделевского квадратичного оператора V, определенного формулой (8), легко видеть, что для любого

$$x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)} \right) \in S^1 \; V x^{(O0)} = x^{(0)},$$

т.е. частоты аллелей не изменяются от поколения к поколению, что составляет первое утверждение в законе Харди-Вайнберга (Генетика и наследственность // Сборник статей. Москва, 1987 г., 300 с.).

Действительно,

$$x_1^{(1)} = P_{AA,A} x_1^2 + 2P_{Aa,A} x_1 x_2 + P_{aa,A} x_2^2 =$$

$$= x_1^2 + x_1x_2 = x_1(x_1 + x_2) = x_1,$$

$$x_2^{(1)} = P_{AA,a}x_1^2 + 2P_{Aa,a}x_1x_2 + P_{aa,a}x_2^2 =$$

$$= x_2^2 + x_1x_2 = x_2(x_1 + x_2) = x_2.$$

Таким образом, для любого k

$$x^{(k)} = x^{(0)} \tag{9}$$

Пусть $x^{(0)} = (x, 1 - x)$ – начальное распределение на $E = \{1,2\}$ и $P_x -$ вероятностная на Ω, соответствуюшая менделевскому квадратичному оператору (8) и начальному распределению $(x, 1 - x)$.

Теорема. Для менделевских мер P_x при любом $x \in [0,1]$ и любых натуральных k и l имеет место следующее равенство:

$$P_x(\xi_k = i, \xi_{k+l} = j) =$$

$$= P_x(\xi_k = i) \cdot P_x(\xi_{k+l} = j) + + \frac{(-1)^{i+j}x(1 - x)}{2^l}, \tag{10}$$

для любых $i, j \ \in E$.

Доказательство теоремы достаточно сложно, и требует громоздких вычислений. В этой связи, в данной работе ограничимся с формулированием теоремы. Для ясности, подчеркнем, что настоящая статья является продолжением статьи [1]. В данной исследование более подробно приведены применения квадратичных операторов, а также определен класс менделевских операторов и для этого класса операторов дается конструкция мер, названных менделевскими [2-9].

Отметим, что квадратичные операторы используются при исследовании закономерностей, имеющие дело с взаимодействием между размножающимися и диффундирующими частицами; биологические задачи о динамике популяции замкнутой генетической системы; экономические задачи об устойчивости в моделях коллективного поведения и т.п.

Известно, что теория квадратичных операторов, широко используется практически во всех областях математики и механики, а также в биологии [10-18]. Следует, отметит что, изложенные материалы в данной статье трудно освоится студентами. Для изучения подобных тем требуется новые педагогические технологии по преподаванию математики, требуют от студентов много работы над собой. Использование новых педагогических технологий изложенных в [19-25], при преподавании специальных предметов, дали хорошие положительные результаты.

При изучение квадратичных операторов время играет важную роль в изучении закономерности. Обычно, квадратичные операторы с непрерывным временем приводятся к нелинейным дифференциальным уравнениям. Так, в работах [26-49] исследованы аналогичные квадратичные операторы с непрерывным временем и краевые задачи для нелинейных дифференциальных уравнений.

Из курса функционального анализа известно, что линейный оператор, определенный в двумерном симплексе S^1 (случай $N = 2$), записывается в виде матрицы второго порядка. Проблема обобщения основных свойств матрицы на операторные матрицы, в свою очередь, является важным вопросом теории операторов. Задачи, связанные со спектральными свойствами операторных матриц глубоко изучается многими учеными, что в дальнейшем целесообразно применить эти теории в исследуемых нами квадратичных операторов.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА (REFERENCES)

1. Мухитдинов Р.Т., Абдуллаева М.А. Эргодические свойства мер, порожденных одним классом квадратичных операторов // Проблемы науки, 63:4 (2021), с.16-19.

2. Расулов Т.Х., Мухитдинов Р.Т. Уравнение Вайнберга для собственных функций модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке // Молодой учёный, № 9, часть 1, 2015, с.23-25.

3. Мухитдинов Р.Т. Construction of periodic solutions of nonlinear differential equations of second order // Международная научно-практическая конференция «Интеграция современных научных исследований в развитие общества», 28-29 декабря, Россия, 2016, с.127-129.

4. Мухитдинов Р.Т. Комплексный формы представления уравнения идеального твёрдого тела // Международная научно-практическая конференция «Интеграция современных научных исследований в развитие общества», 28-29 декабря, Россия, 2016, с.129-131.

5. Мухитдинов Р.Т., Абдуллаева М.А. Крайние точки множества квадратичных операторов, определенных на S^1 // Scientific progress, 1:2 (2021), p.470-477.

6. Muhitdinov R.T., Do'stova S.B. Gipergeometrik qatorlar haqida ayrim mulohazalar// Science and Education,scientific journal,2:11 (2021), 114-127.

7. Муҳитдинов Р.Т., Абдуллаева М.А. (2021). Гипергеометрик тенглама, унинг ечимлари ва гипергеометрик функциялар ҳақида. Science and Education 2 (11), 128-140.

8. Muxitdinov, R. (2022). О дифференциации обучения в вузах // Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).

9. Ганиходжаев Н.Н, Жамилов У.У., Мухитдинов Р.Т. Не эргодические квадратичные операторы двуполой популяции // Украинский математический журнал, том № 65, 2013, с.1152-1160.

10. Расулов Х.Р., Джуракулова Ф.М. Об одной динамической системе с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с. 19-22.

11. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Модуль қатнашган баъзи тенглама, тенгсизлик ва тенгламалар системаларини ечиш йўллари // Science and Education, scientific journal, 2:9 (2021), p.7-20.

12. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики, № 53:2 (2021), с. 7-10.

13. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // Scientific progress, 2:2 (2021), p.870-879.

14. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяция ва унинг математик модели ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.81-96.

15. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяциянинг динамикаси ҳақида // Scientific progress, 2:1 (2021), p.665-672.

16. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об анализе некоторых невольтерровских динамических систем с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с.27-30.

17. Rasulov Kh.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.

18. Rasulov X.R., Qamariddinova Sh.R. Ayrim dinamik sistemalarning tahlili haqida // Scientific progress, 2:1 (2021), p.448-454.

19. Rasulov, H. (2021). «Kompleks analiz» fanida mustaqil ta'limni tashkil qilish. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

20. Расулов Т.Ҳ., Расулов Х.Р. (2021). Ўзгариши чегараланган функциялар бўлимини ўқитишга доир методик тавсиялар. Scientific progress. 2:1, 559-567 бетлар.

21. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. (2022) Ikkita buzilish chizig'iga ega kvazichiziqli elliptic tenglama uchun chegaraviy masala haqida // Central Asian Academic Journal Of Scientific Research, 2(5), 544-557 b.

22. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Айрим рационал тенгламаларни ечишда интерфаол усулларни қўлланилиши ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p. 586-595.

23. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Айрим иррационал тенгламаларни ечишда интерфаол усулларни қўлланилиши // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.596-607.

24. Rasulov H. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10 (2019), p.35-38.

25. Rasulov, R. X. R. (2021). Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation of a mixed type // Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

26. Rasulov X.R. Sayfullayeva Sh.Sh. Buzilish chizig'iga ega bo'lgan elliptik tipdagi tenglamalar uchun qo'yiladigan chegaraviy masalalar haqida // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), p.46-54.

27. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.

28. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.

29. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.

30. Rasulov, H. (2021). Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

31. Rasulov, X. (2022). Об одном краевом задаче для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).

32. Rasulov, X. (2021). Краевая задача для одного нелинейного уравнения смешанного типа. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

33. Салохитдинов М.С., Расулов Х.Р. (1996). Задача Коши для одного квазилинейного вырождающегося уравнения гиперболического типа // ДАН Республики Узбекистан, №4, с.3-7.

34. Rasulov, R. X. R. (2021). Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation of a mixed type. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

35. Расулов Х.Р. (1996). Задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №12, с.12-16.

36. Rasulov, R. X. R. (2021). Гиперболик типдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

37. Rasulov, R. X. R. (2022). О краевых задачах для уравнений эллиптического типа с линией искажения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).

38. Rasulov Kh.R., Sobirov S.Zh. A problem of the Gellerstedt type for one mixed-type equation with two lines of degeneration // Scientific progress, 2:1 (2021), p. 42-48.

39. Исломов Б., Расулов Х.Р. (1997). Существование обобщенных решений краевой задачи для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №7, с.5-9.

40. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, с. 197-199.

41. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. О существовании обобщенного решения краевой задачи для нелинейного уравнения смешанного типа // Вестник науки и образования, 97:19-1 (2020), С. 6-9.

42. Rasulov, X. (2022). Краевые задачи для квазилинейных уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).

43. Rasulov, R. X. R. (2022). Бузилиш чизиғига эга бўлган квазичизиқли аралаш типдаги тенглама учун Трикоми масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

44. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. О некоторых вольтерровских квадратичных стохастических операторах двуполой популяции с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с.23-26.

45. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Об одном квадратично стохастическом операторе с непрерывным временем // «The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference, Tashkent, mart 2021 y., p.145-146.

46. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об одной динамической системе с непрерывным временем // «The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference, Tashkent, mart 2021 y., p.115-116.

47. Шукурова М.Ф., Раупова М.Х. Каср тартибли интегралларни ҳисоблашга доир методик тавсиялар // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), 65-76 b.

48. Бозорова Д.Ш., Раупова М.Х. О функции Грина вырождающегося уравнения эллиптического типа // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), c.14-22.

49. Жамолов Б.Ж., Раупова М.Х. О функции Римана вырождающегося уравнения гиперболического типа // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), c.23-30.

21	ЧОРВАЧИЛИКНИ ЯНГИ ИННОВАЦИОН ТЕХНОЛОГИЯЛАР АСОСИДА РИВОЖЛАНТИРИШ ИСТИҚБОЛЛАРИ	**133**
22	МУСТАҲКАМ ОЗУҚА БАЗАСИНИ ЯРАТИШ – ЧОРВАЧИЛИК СОҲАСИНИ РИВОЖЛАНТИРИШ ГАРОВИДИР	**137**
23	РАННЯЯ СЛУЧКА И ПРОДУКТИВНОСТЬ МОЛОДЫХ САМОК	**141**
24	UMUMLASHGAN FRIDRIXS MODELI XOS QIYMATLARINING MAVJUDLIGI	**149**
25	SONLARNING 10 GA, 5 GA VA 2 GA BO’LINISH BELGILARI MAVZUSINI O’QITISHNING O’ZIGA XOS XUSUSIYATLARI	**164**
26	MAKTAB MATEMATIKA KURSIDA O’RIN ALMASHTIRISH VA GURUHLASH QOIDALARINI O'QITISHNING O'ZIGA XOS METODLARI	**177**
27	ОБ ОДНОМ МЕРЕ, ПОРОЖДЕННОЙ ОДНИМ КЛАССОМ КВАДРАТИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ	**189**
28	СЮРЪЕКТИВНЫЕ КВАДРАТИЧНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, ОПРЕДЕЛЕННЫЕ НА ДВУМЕРНОМ СИМПЛЕКСЕ	**210**
29	ПРИЛОЖЕНИЕ КВАДРАТИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ИХ КРАЙНИЕ ТОЧКИ НА СИМПЛЕКСЕ	**225**
30	TAKRORIY EKILGAN SOYA- IKKINCHI DAROMAD	**242**
31	AYOLNI OILAVIY MUNOSABATLARDAGI O’ RNI	**246**
32	AYOL JAMIYATNING KO’RKI, SHA’NI VA YARATUVCHISIDIR	**253**
33	FALSE DETECTION TECHNIQUES OF MILITARY SERVICES BY VERBAL AND NOVERBAL SIGNS	**259**
34	FAMILY STABILITY THE INFLUENCE OF PREMARITAL FACTORS	**268**
35	MUSTAHKAM OILALARIMIZ MUSTAHKAMLANISHIDA, JAMIYATIMIZ RIVOJLANISHIDA AYOL VAZIFALARINING O‘RNI VA AHAMIYATI	**274**
36	OILAVIY MUNOSABATLARDA FARZANDLAR VA OTA-ONALAR MULOQOTINING O‘ZIGA XOS XUSUSIYATLARI	**281**
37	ЎСПИРИНЛАР ЎРТАСИДАГИ НИЗОЛАРНИНГ ТИПЛАРИ ВА НИЗОЛИ ВАЗИЯТЛАРНИ БОШҚАРИШ	**288**
38	ЎСПИРИНЛАРДА ШАХС ВА ГУРУХЛАР ЎРТАСИДАГИ НИЗОЛАРНИНГ ПСИХОЛОГИК ХУСУСУСИЯТЛАРИ	**295**
39	ЎСПИРИНЛАРДАГИ НИЗОЛАРНИНГ ПСИХОЛОГИК МЕЗОНЛАРИ	**304**
40	INSONDA MEHR-MUXABBAT TUYG’USINI SHAKLLANTIRISHDA IJTIMOIY MUHITNING O’RNI	**313**

JOURNAL OF NEW CENTRY INNOVATIONS

IN ALL AREAS

Google Scholar

JOURNALS MASTER LIST