Моя профессиональная карьера

Научно-образовательный электронный журнал

ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ

Выпуск №26 (том 6)
(май, 2022)

Международный научно-образовательный электронный журнал
«ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ»

УДК 37

ББК 94

Международный научно-образовательный электронный журнал «ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ». Выпуск №26 (том 6) (май, 2022). Дата выхода в свет: 31.05.2022.

Сборник содержит научные статьи отечественных и зарубежных авторов по экономическим, техническим, философским, юридическим и другим наукам.

Миссия научно-образовательного электронного журнала «ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ» состоит в поддержке интереса читателей к оригинальным исследованиям и инновационным подходам в различных тематических направлениях, которые способствуют распространению лучшей отечественной и зарубежной практики в интернет пространстве.

Целевая аудитория журнала охватывает работников сферы образования (воспитателей, педагогов, учителей, руководителей кружков) и школьников, интересующихся вопросами, освещаемыми в журнале.

Материалы публикуются в авторской редакции. За соблюдение законов об интеллектуальной собственности и за содержание статей ответственность несут авторы статей. Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов статей. При использовании и заимствовании материалов ссылка на издание обязательна.

«PROPERTIES OF INTEGRATED FIELD TRANSISTORS» *S.M.Raximova*	777
«CHIZIQLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR MAVZUSINI «FIKRLARNING SHIDDATLI HUJUMI» METODIDAN FOYDALANIB O'QITISH» Elmuradova Hilola Botirovna	784
«TENGSIZLIK YORDAMIDA YECHILADIGAN BA'ZI MASALALAR» Elmuradova Hilola Botirovna	793
«РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ НА ПРИМЕРАХ» Саидова Нилуфар Мухаммадовна	802
«ALGEBRAIK KASRLAR USTIDA BIRGALIKDA BAJARILADIGAN AMALLAR» Jo'rayeva Nargiza Oltinboyevna, Barakayeva Dinara Zokir qizi	812
«SIRKUL VA CHIZG'ICH YORDAMIDA YASASHGA DOIR MASALALAR» Jo'rayeva Nargiza Oltinboyevna, Negmurodova Sanobar G'ayrat qizi	823
«SFERAGA ICHKI VA TASHQI CHIZILGAN KO'PYOQLAR VA AYLANISH JISMLARI MAVZUNI O'QITISH METODIKASI» Jo'rayeva Nargiza Oltinboyevna, Tosheva Marjona Maqsud qizi	835
«TO'LDIRUVCHI BURCHAKNING TRIGONOMETRIK FUNKSIYALARI UCHUN FORMULA MAVZUSINI O'QITISH BO'YICHA MULOHAZALAR» Jo'rayeva Nargiza Oltinboyevna, Qayumova Shaxnoza Razzoq qizi	847
«TANLASH USULI BILAN KOMBINATORIKA MASALALARNI YECHISH METODIKASI» Rashidov Anvarjon Sharipovich, Muxtorova Moxira Ma'rufjon qizi	859
«TO'G'RI BURCHAKLI UCHBURCHAKLARNI YECHISH MAVZUSINI O'QITISHNING O'ZIGA XOS XUSUSIYATLARI» Mardanova Feruza Yadgarovna, Shomurodova Dildora Otabekovna	870
«Y=X^2 FUNKSIYA» Mardanova Feruza Yadgarovna, Djo'rayeva Dinara Ibrohim qizi	885
«УМНОЖЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ И СМЕШАННЫХ ЧИСЕЛ» Ибрагимова Фирюза Сулеймановна, Марданова Феруза Ядгаровна	896
«KASR TARTIBLI INTEGRALLAR TO'G'RISIDA BOSHLANG'ICH TUSHUNCHALAR VA ULARNING QO'LLANILISHI HAQIDA» Shukurova Mubashiraxon Furqatovna	912
«ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ» Бозорова Дилноза Шавкат кизи	929

ФИО автора: *Саидова Нилуфар Мухаммадовна*

Бухарский государственный университет, преподаватель кафедры дифференциальных уравнений

Название публикации: «РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ НА ПРИМЕРАХ»

Аннотация: В статье даны методические рекомендации по решению смешанных задач для уравнений математической физики методом разделения переменных. Показаны особенности решения смешанной задачи для однородных и неоднородных уравнений.

Ключевые слова: классические уравнения математической физики, основные задачи, смешанные задачи, метод разделения переменных, однородные уравнения, неоднородные уравнения, ряд Фурье, сходимость функциональных рядов.

Abstract: The article gives guidelines for solving mixed problems for equations of mathematical physics by the method of separation of variables. The features of the solution of the mixed problem for homogeneous and inhomogeneous equations are shown.

Keywords: classical equations of mathematical physics, basic problems, mixed problems, method of separation of variables, homogeneous equations, inhomogeneous equations, Fourier series, convergence of functional series.

Поскольку предмет уравнения математической физики является сложным предметом, она требует от педагога глубоких научных знаний при обучении([14], [17], [23]),. Поскольку каждый предмет имеет свой подход к обучению и для обучения решении задач поставленных дифференциальным уравнениям требуются как научные, так и педагогические навыки. ([3]- [10]).

Метод разделения переменных, также известный как метод Фурье, широко используется для решения краевых задач в дифференциальных уравнениях.

Что следует учитывать при обучении этому методу студентов факультетов математики, прикладной математики и информатики, физики? Как учить? В чем суть этого метода? Особенность метода? На эти вопросы нужно ответить.

В этой статье мы расскажем про решения смешанной задачи методом разделения переменных и о том, на что надо обращать внимания при обяснение этой темы.

Краевые задачи различаются в основном в зависимости от условий, заданных на границе. Для простоты мы рассмотрим смешанные задачи в одномерном случая с соответствующими начальными условиями. Задачу также называют смешанной, если начальные и граничные условия рассматриваются вместе, а тип смешанной задачи различается в зависимости от граничного условия. Многие линейные (также нелинейные) задачи математической физики решаются методом разделения переменных.

Рассмотрим задачу решения смешанной задачи для однородного уравнения методом разделения переменных.

Опишем метод разделения переменных или метод Фурье для задачи поставленной уравнению колебания струны, концы которого закреплены в точках $x = 0$ и $x = l$. Задача описывается следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

начальные условия:

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x), \qquad (2)$$

граничные условия:

$$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=l} = 0. \qquad (3)$$

Будем искать тождественно не равные нулю решения уравнения (1), удовлетворяющие краевым условиям (3) в виде произведения

$$u(x,t) = X(x)T(t), \qquad (4)$$

Где X(x)– функция, зависящая только от переменной x, а T(t) – зависящая только от t.

Общая идея заключается в том, чтобы найти бесконечное число таких решений уравнения с частными производными (которые удовлетворяют граничным условиям и, т.к. ГУ однородные, их сумма тоже будет удовлетворять ГУ). Эти простейшие функции $u_n(x,t) = X_n(x)\cdot T_n(t)$ (называемые фундаментальными решениями) являются как бы элементарными кирпичиками, из которых строится решение нашей задачи. Решение нашей задачи u(x, t) находится в виде такой линейной комбинации фундаментальных, решений $u_n(x, t) = X_n(x)\cdot T_n(t)$, что результирующая сумма удовлетворяет начальным условиям. Поскольку эта сумма удовлетворяет уравнению и граничным условиям, она является решением исходной задачи.

Нам осталось проделать все эти выкладки достаточно подробно.

В результате подстановки получаем обыкновенное однородное дифференциальное уравнение с однородными граничными условиями:

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0, \qquad (5)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad (6)$$

здесь $\lambda > 0$, $\lambda = const$. Теперь можно решить каждое из этих обыкновенных дифференциальных уравнений. Произведение соответствующих решений будет удовлетворятьисходному уравнению с частными производными. (Заметим, что мы существенно упростили исходное уравнение с частными производными второго порядка, превратив его в два обыкновенных дифференциальных уравнения.)

Обратим теперь внимание на следующее важное обстоятельство: константа разделения λ должна быть отрицательной (другими словами, функции T(t) должны стремиться к нулю при $t \to \infty$), иначе получаются только тривиальные решения $X(x) \equiv 0$.

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \qquad (7)$$

Решим эти уравнения. Они являются уравнениями стандартно типа.

Приходим к задаче Штурма-Лиувилля (6),(7).Эта задача имеет нетривиальные решения (собственные функции)

$$X_k(x) = \sin\frac{\pi kx}{l},$$

определяемые с точностью до произвольного множителя только при значениях λ, равных собственным значениям

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \quad k = 1,2,...$$

этим же значениям $\lambda = \lambda_k$ соответствуют решения уравнения (6)

$$T_k(t) = a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l},$$

таким образом, функции

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

являются частными решениями уравнения (1), удовлетворяющими условиям (3). Решение задачи (1)-(4) получается в виде бесконечной суммы частных решений

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (8)$$

где константы a_k и b_k могут быть найдены из начальных условий (2)

как коэффициенты Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

В курсе дифференциальных уравнений доказывается следующая теорема:

Teorema [2]. Если функции $u_k(k = 1,2,...,n,...)$ являются линейными и однородными решениями однородного уравнения $L(u) = 0$ (обыкновенного дифференциального уравнения или дифференциального уравнения счастными производными), то ряд также является решением данного уравнения, если произведения участвуют в уравнении, если это возможно.

Предположим, что линия (8) может быть передифференцирована. Затем определим константы таким образом, что (8) сумма ряда (2) удовлетворяет начальным условиям, в результате получаются следующие уравнения:

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi x}{l}\ ,\qquad (9)$$

$$\psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l} b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\ .\qquad (10)$$

Это выражение совпадает с разложением функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряд Фурье посинусам.

Коэффициенты этих распределений находятся по следующим формулам:

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) sin\frac{k\pi x}{l}dx\,,$$

$$b_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l \psi(x) sin\frac{k\pi x}{l}dx\,,$$

то есть, $a_k=\varphi_k\,, b_k=\frac{l}{k\pi a}\psi_k$, функция, определяемая формула (8)

дает полное решение задачи и для (8) ряда выполняется неравенство:

$$|u_k(x,t)|\le|a_k|+|b_k|\,.$$

Этот ряд будет можарантой для ряда (8):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|+|b_k|\right)$$

Из ряда (8) в результате дважды непрерывно-дифференцирования переменных t и x получаются следующие ряды:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}=-\frac{\pi a}{l}\sum_{k=1}^{\infty}k^2\left(a_k\cos\frac{k\pi at}{l}+b_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}\,,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}=-\frac{\pi}{l}\sum_{k=1}^{\infty}k^2\left(a_k\cos\frac{k\pi at}{l}+b_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}\,.$$

Этот ряд будет можарантой для рядов:

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2\left(|a_k|+|b_k|\right).$$

Если исходные заданные функции удовлетворяют следующим условиям, то ряды образованный дифференцированием равномерно сходится:

1) $\varphi(x)$ Производные функции до 2-го порядка непрерывны, произведения 3-го порядка кусочно-непрерывно, если выполняется следующее условие:

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0; \quad \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0.$$

2) $\psi(x)$ функция непрерывно дифференцируема, произведение 2- порядка кусочно-непрерывно, если выполняются следующие условия:

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0.$$

Мы подробно изучили решение смешанной задачи (1) - (3)

Задача: Найти решение задачи для уравнения теплопроводности методом Фурье.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0<x<l, \quad t>0 \qquad (1)$$

$$U(x,t)|_{x=0}=0 \quad U(x,t)|_{x=l}=0 \qquad t \geq 0$$

(2)

$$U(x,t)|_{t=0}= \varphi(x) = \begin{cases} x\,, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ l - x\,, & \frac{l}{2} < x \leq l, \;\; l > 0 \end{cases}$$

(3)

Решение: Для решения начально-краевой задачи (1) - (3) применим метод Фурье разделения переменных. Будем искать частное решение задачи в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Подставим предполагаемую форму решения в исходное уравнение (1)

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0\,,$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0\,,$$

В результате переменные разделяются, и получается два линейных обыкновенных дифференциальных уравнения.

Подставляя *u(x,t)* в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$ в граничные условия (2) получим

$$X(0)T(t)=0, \qquad X(l)T(t)=0$$

Поскольку равенства должны выполняться тождественно, то

$$X(0)=0, \qquad X(l)=0$$

Таким образом, для функции $X(x)$ получили задачу Штурма-Лиувилля

Общее решение имеет вид

$$X(x)=c_1\cos(\lambda x)+c_2\sin(\lambda x)$$

Получили спектральное уравнение для нахождения собственных значений λ задачи Штурма-Лиувилля

$$\sin(\lambda l)=0, \qquad \lambda l=\pi k, \quad k=1,2,\ldots.$$

Собственные значения задачи равны

$$\lambda_k=\frac{\pi k}{l}, \qquad k=1,2,\ldots.$$

Им соответствуют собственные функции

$$X_k(x)=\sin(\frac{\pi k}{l}), \qquad k=1,2,\ldots.$$

Уравнение для функции $T(t)$ примет вид

$$T_k'(t)+(\frac{\pi k}{l})^2 \qquad T_k(t)=0$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$T_k(t)=c_k e^{-(\frac{\pi k}{l})^2 t}$$

Решение u(x,t) исходной задачи будем искатьв виде ряда

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)X_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k e^{-(\frac{\pi k}{l})^2 t}\sin(\frac{\pi kx}{l})$$

Коэффициенты c_k этого ряда найдем из начального условия (3)

$$u(x,t)|_{t=0}=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\sin(\frac{\pi kx}{l})=\varphi(x)=\begin{cases} x\,, & 0\le x\le \frac{l}{2} \\ l-x\,, & \frac{l}{2}<x\le l,\ \ l>0 \end{cases}$$

Коэффициенты c_kпредставляют собой коэффициенты разложения функции $\varphi(x)$ на[0,l] в ряд Фурье по собственным функциям $\left\{sin(\frac{\pi kx}{l})\right\}_{k=1}^{\infty}$

$$c_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\ sin(\frac{\pi kx}{l}) = \frac{4l}{\pi^2 k^2}\sin(\frac{\pi k}{2})$$

Таким образом, решение исходной начально-краевой задачи имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4l}{\pi^2 k^2}\sin(\frac{\pi k}{2})e^{-(\frac{\pi k}{l})^2 t}\, sin(\frac{\pi kx}{l})$$

Учитывая, что

$$\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } k = 2n - \text{четное} \\ (-1)^n, & \text{если } k = 2n+1 - \text{нечетное} \end{cases}$$

получим

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4l(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2}\,e^{-(\frac{\pi(2n+1)}{l})^2 t}\sin(\frac{\pi(2n+1)x}{l})$$

Ответ:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4l(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2}\,e^{-(\frac{\pi(2n+1)}{l})^2 t}\sin(\frac{\pi(2n+1)x}{l})$$

В заключение мы можем сказать, что метод разделения переменных применяется для решения краевых задач для линейных уравнений второго порядка гиперболического, параболического и эллиптического типов, а также для некоторых классов нелинейных уравнений и уравнений высших порядков. ([21], [22], [23]).

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М. Изд-во МГУ. 2004.

2.Элмуродова Х.Б. (2016). Условия существования виртуального уровня обобщенной модели фридрихса. *Молодой ученый,* 13(117), 62-65.

3. Элмуродова Х.Б. (2016). Кубический числовой образ на примерах. *Молодой ученый,* 12(116), 70-73.

4. Санат Худаяров., Ҳилола Элмурадова. (2021). Транспорт масаласи ва унинг математик моделини тузиш. // *Scientific progress,* 2(4), p. 839-848.
5. Ҳилола Ботировна Элмурадова. Параболик типдаги тенглама учун грин формуласи ва ечимнинг интеграл ифодаси. // Scientific progress, 2(4)(2021), p. 1407-1412.
6.Hilola Elmuradova. Aniqmas integrallar mavzusini oʻqitishda “tushunchalar tahlili” usulini qoʻllash. Pedagogik mahorat (maxsus son). 2021 y.,oktabr. б, 67-71.
7.Ҳилола Элмурадова., Нигора Шарипова. Такрорий комбинацияларга оид масалалар ечиш методикаси. Математика ва уни ўқитишнинг замонавий усуллари (II).2021й.,136-141
8. Худаяров С.С. (2018). Метод разложение в прямой интеграл для одной операторной матрицы. *Ученый* XXI *века,* 4-1(39), 21 -22.
9. Худаяров С.С. (2018). Исследование спектра диагональных матриц. *Ученый* XXI *века,* 4-1(39), 17-18.
10. Худаяров С.С. (2018). Существенный спектр дополнения шура одной операторной матрицы. *Молодой ученый,* 8(112), 28-30.
11. Худаяров С.С., Умуров Х.Х. (2016). Некоторые свойства собственных чисел матрицы 2 × 2. *Молодой ученый,* 10(114), 18-20.
12. Шаҳло МЕРОЖОВА., Ҳилола ЭЛМУРАДОВА., Дилноза АЗИМОВА. Чегаравий шартлар бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган параболик типдаги тенглама учун биринчи аралаш масалани ечиш. Pedagogik mahorat (1-son). 2021 y., fevral. b, 150-157.
13. Меражова Ш.Б., Мардонова Ф.Я. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар» фанини интерфаол усуллардан фойдаланиб ўқитиш самараси ҳақида. «Pedagogik mahorat» 2019 yil, 5-son, 131-133bb
14. Меражова Ш.Б. Понятие прямой и обратной задачи в преподавании предмета уравнений математической физики. Вестник Науки и образования. 19(97), 2,
2020. С. 81 -
85.

15. Маматова Н.Х. Преподавание предмета «математика для экономистов» при помощи метода кейс-стади. Вестник Науки и образования. 19(97), 2, 2020. С. 45-50.

16. Меражова Ш.Б., Нуриддинов Ж.З., Меражов Н.И., Хидиров У.Б. Методы решений задачи Коши для уравнения волны в случае n=2 и n=3// Academy. 4 (55), 2020. С.21 -25.

17. Тураева Н.А. Методические рекомендации по обучению будущих учителей математики конструированию и анализу урока. Вестник Науки и образования. 19(97), 2, 2020. С. 45-50.

18. Тураева Н.А. Критерии и уровень овладения умениями системного подхода к конструированию и анализу урока математики. Вестник Науки и образования.11(114), 1, 2021. С. 95-99.

19. Меражова Ш.Б. Решение методом продолжения задач математической физики в полуограниченных областях. «Молодой учёный « международный научный журнал, 2016 12, ЧАСТЬ I, 43-45

20. Merajova Sh.B. Methods of teaching the practical application of topics related to differential equations. European Journal of Research and Reflection in Educational Sciences Vol. 8 No. 9, 2020 ISSN 2056-5852 pp 37-40

21. Меражова Ш.Б. Некоторые методические трудности, возникающие при нахождении общего решения уравнений математической физики. Вестник Науки и образования. 11(114), 2, 2021. С. 98-102.

22. Merajova Sh.B, Saidova N.M. O‘zgaruvchilarni ajratish usuli haqida. «ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ» №25 том 4 (апрель, 2022), 1601-1609

23. Саидова Н.М. Использование математических моделей при изучении различной деятельности экономических систем. // *Scientific progress*, 2(4)(2021), p. 1079-1086.

24.Саидова Н.М, Отажонова С. Trigonometrik masalalarni yechishda ba’zi ekvivalent nisbatlarni tadbiq etish. «ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ» №25 том 4 (апрель, 2022), 1640-1651