МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
БУХАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Т.Х. РАСУЛОВ, Э.Б. ДИЛМУРОДОВ

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРНЫХ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(монография)

Издательство «Дурдона»
Бухара – 2022

УДК 512.643
22.143
Р 24
Расулов, Т.Х., Дилмуродов, Э.Б.
Спектральные свойства операторных матриц второго порядка [Текст] / Т.Х. Расулов, Э.Б. Дилмуродов .-Бухара: "Sadriddin Salim Buxoriy" Durdona,2022. -108 с.

ББК 22.143

Настоящая монография посвящена изучению спектральных свойств двух классов самосопряженных неограниченных операторных матриц второго порядка, семейства обобщенных моделей Фридрихса и операторной матрицы второго порядка, связанной с гамильтонианом системы с не более чем тремя частицами на трехмерной решетке. Определена структура числовой области значений обобщенной модели Фридрихса, имеющая вид операторных матриц второго порядка, а также найдены условия совпадения спектра и числовой области значений. Получены оценки для границы компонент квадратичной числовой области значений обобщенной модели Фридрихса. С помощью спектра семейства обобщенных моделей Фридрихса определен существенный спектр операторной матрицы второго порядка, связанной с системы с несохраняющимся и не более чем тремя частицами. Выделены множества спектрального параметра, для которых операторная матрица второго порядка имеет конечное или бесконечное число собственных значений вне существенного спектра. Более того, доказана что, если спектральный параметр равно 6, то операторная матрица второго порядка имеет бесконечное число собственных значений как слева, так и справа существенного спектра.

Рецензенты:

М.Х.Тешаев, ведущий научный сотрудник Бухарского отделения института Математики

Х.Р.Расулов, доцент кафедры математического анализа БухГУ

Монография рекомендовано к изданию решением Научно-технического совета БухГУ от 28 сентября 2021 года №1.

ISBN 978-9943-7903-2-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Матрицы, элементы которых являются линейными операторами в банаховых или гильбертовых пространствах, называются операторными матрицами [1, 2].

Один из основных классов таких матриц представляют собой гамильтонианы системы с несохраняющимся числом частиц на непрерывном пространстве или на решетке. Их количество может быть неограниченным, как в случае моделей спин-бозон, или ограниченным, как в случае “урезанных” моделей спин-бозон. Отметим, что такие системы обычно возникают в задачах физики твердого тела, квантовой теории поля, статистической физики, магнитогидродинамики и квантовой механики [3, 4].

Задача о полном спектральном описании оператора энер-гии системы с несохраняющимся неограниченным числом ча-стиц является довольно трудной. В связи с этим естественно рассмотреть упрощенные (“урезанные”) модели, отличающиеся от этого оператора энергии тем, что число частиц в них ограничено и не превосходит $m, m \in N$. В то же время изучение систем с не более чем m частиц сводится к изучению спектральных свойств самосопряженных операторов, действующих в “об-резанном” подпространстве $H^{(m)}$, состоящем из нолчастичного, одночастичного, двухчастичного, ..., $(m+1)-$ частичного подпространств фоковского пространства (здесь $H^{(m)}$ является пря-мой суммой $(m+1)$ гильбертовых пространств) [5, 6].

В настоящее время дискретный спектр операторных матриц относится к наиболее интенсивно изучаемым объектам в теории линейных операторов. Одним из важных вопросов в спектральном анализе таких операторов является изучение бесконечного числа собственных значений, лежащих левее нижнего края и правее верхнего края существенного спектра (такой эффект, касающийся нижнего края, называется эффектом Ефимова [см. 7-9]). Эффект Ефимова: если в системе трех частиц, взаимодействующих с помощью парных короткодействующих потенциалов, ни одна из трех двухчастичных подсистем не имеет связанных состояний с отрицательной энергией, но по меньшей мере две из них имеют резонанс с энергией в нуле, то у этой трехчастичной системы существует бесконечное число трехчастичных связанных состояний с отрицательной энергией, накапливающихся к нулю. Этот эффект впервые был обнаружен Ефимовым [10]. Строгое математическое доказательство существования эффекта Ефимова было проведено впервые в работе Д.Р.Яфаева [11]. Затем Ю.Н.Овчинников, И.М.Сигал [12], А.В.Соболев [13], Х.Тамура [14] и другие ученые изучали сушествование эффекта Ефимова для трехчастичного непрерывного оператора Шредингера.

В моделях физики твердого тела [2] и решетчатой теории поля [6] возникают так называемые дискретные оператора Шредингера, являющиеся решетчатым аналогом обычного трехчастичного оператора Шредингера в непрерывном пространстве. В работах [15, 16] впервые доказано (на математическом уровне строгости) существование эффекта Ефимова для гамильтониана системы трех произвольных и одинаковых частиц на трехмерной решетке, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения. Метод был основан на аналитических свойствах определителей Фредгольма и на свойствах интегральных уравнений Фаддеева.

В работе [17] для разностного трехчастичного оператора Шрёдингера показано, что только при нулевом значении полного квазиимпульса ($K=0$) и некотором $\mu=\mu_0>0$ (где $\mu-$ энергия взаимодействия двух частиц) имеет место эффект Ефимова.

В работах [18-20] для числа собственных значений $N(0,z)$ дискретного трехчастичного оператора Шёрдингера, лежащих левее $z,\ z<0$ получена асимптотика

$$\lim_{z \nearrow 0} N(0,z)\,|\ln|z||^{-1} = U_0 \qquad (0 < U_0 < \infty)\,, \tag{1}$$

где U_0 не зависит от потенциалов взаимодействий, а зависит только от масс трех частиц. Установлена также асимптотика

$$\lim_{K \to 0} N(K,0)\,|\ln|K||^{-1} = 2U_0$$

для числа отрицательных собственных значений $N(K,0)$, что характерно только для решетчатых систем и не имеет аналога в непрерывном случае. Видно, что в силу равенства (1) существование эффекта Ефимова автоматически вытекает из положительности числа U_0.

В работе [21] доказано существование бесконечного числа собственных значений на лакуне существенного спектра гамильтониана системы трех произвольных частиц на решетке.

В работе [22] изучено существование эффекта Ефимова для одного модельного дискретного “трехчастичного” оператора Шрёдингера, возникающего в модели Хаббарда. При этом использованы инструменты принципа минимакса для ограниченных самосопряженных операторов и свойства положительных интегральных операторов.

Отметим, что в упомянутых работах изучено наличие эффекта Ефимова для системы с сохраняющимся ограниченным числом частиц.

В работах [7-9] установлено существование эффекта Ефимова для операторных матриц, соответствующих с не более тремя несохраняющимся частицами, если соответствующая обобщенная модель Фридрихса имеет виртуальный уровень на дне существенного спектра. Получена аналогичная к (1) асимптотика дискретного спектра.

В работах [23-25] для операторных матриц найдены условия, гарантирующие существование бесконечного числа собственных значений, лежащих внутри существенного спектра (на лакуне существенного спектра, ниже существенного спектра).

Настоящая монография посвящена к исследованию спектральных свойств операторных матриц второго порядка [53-60], в частности, ранее не изученного эффекта - так называемого *двустороннего эффекта Ефимова* для операторных матриц.

ГЛАВА I. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА ОДНОГО КЛАССА САМОСОПРЯЖЕННЫХ НЕОГРАНИЧЕННЫХ $2\times 2-$ ОПЕРАТОРНЫХ МАТРИЦ.

В первой главе монографии изучается дискретный спектр одного класса неограниченных самосопряженных операторов, допускающих вид $2\times 2-$операторных матриц.

В первом параграфе главы даны предварительные сведения и известные факты. В частности, здесь приведены определение спектра линейного оператора и его классификация, информация относительно числовой области значений и перечислены ее основные свойства. Кроме того, определена квадратичная числовая область значений для $2\times 2-$операторных матриц. В конце параграфа излагаются факты, связанные с пространством Фока.

Во втором параграфе исследован дискретный спектр одного класса самосопряженных $2\times 2-$операторных матриц вида $\mathcal{A}=\mathcal{A}_0+\mathcal{V}$, действующих в прямой сумме двух гильбертовых пространств. Обсуждается случай, когда операторная матрица $\mathcal{A}$ имеет ограниченный существенный спектр и разность резольвент операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_0$ имеет конечный ранг. Показано, что операторная матрица $\mathcal{A}=\mathcal{A}_0+\mathcal{V}$ имеет бесконечное число собственных значений в лакунах существенного спектра тогда и только тогда, когда невозмущенный оператор $\mathcal{A}_0$ имеет бесконечное число собственных значений в этой лакуне. Получены асимптотические формулы для числа собственных значений оператора $\mathcal{A}$, лежащих вне существенного спектра.

В третьем параграфе главы I исследован спектр одного семейства неограниченных $2\times 2-$операторных матриц $\mathcal{A}_t, t\in\mathbb{R}$. Доказана бесконечность числа собственных значений, лежащих в лакуне существенного спектра оператора $\mathcal{A}_0$, сходящихся к обоим концам существенного спектра. Установлена конечность числа собственных значений оператора $\mathcal{A}_t$ при каждом $t \neq 0$. Найдено число $\delta > 0$, для которого операторная матрица $\mathcal{A}_t$ не имеет собственных значений при каждом $t \in \{\xi \in \mathbb{R}: |\xi| \geq \delta\}$.

§1.1. Предварительные сведения и известные факты.

Материал этого параграфа является, по существу, кратким введением в спектральную теорию общих линейных операторов в банаховом или гильбертовом пространстве.

Спектр линейного оператора. Врядли можно указать более важное понятие в теории операторов, чем понятие спектра. Напомним прежде это понятие для конечномерного случая.

Известно, что для фиксированного базиса в пространстве $\mathbb{C}^n$ каждому линейному оператору из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n$ однозначно соответствует $n \times n-$матрица $\mathcal{A}$. Число λ называется собственным значением оператора $\mathcal{A}$, если уравнение

$$\mathcal{A}x = \lambda x$$

имеет ненулевое решение. Совокупность всех собственных значений называется спектром оператора $\mathcal{A}$ и обозначается через $\sigma(\mathcal{A})$; а все остальные значения $\lambda-$регулярными. Иначе говоря, λ есть регулярная точка, если оператор $\mathcal{A} - \lambda I$ обратим. При этом $(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}$ определен на всем $\mathbb{C}^n$ и, как и всякий оператор в конечномерном пространстве, ограничен.

Следовательно, собственные значения $\mathcal{A}-$это комплексные числа λ, для которых детерминант матрицы $\mathcal{A} - \lambda I$ равен нулю. Поэтому спектр оператора $\mathcal{A}$ может состоять из не более чем n точек, поскольку $\det(\mathcal{A} - \lambda I)$ есть полином степени n.

Спектральная теория операторов на бесконечномерных пространствах сложнее, интереснее чем на конечномерных пространствах и очень важна для понимания основных свойств самих операторов.

Пусть $\mathcal{A}-$оператор, действующий в бесконечномерном банаховом пространстве E над $\mathbb{C}$. Число λ называется регулярным для оператора $\mathcal{A}$, если оператор $R_\lambda(\mathcal{A})=(\mathcal{A}-\lambda I)^{-1}$, называемый резольвентой оператора $\mathcal{A}$, определен на всём E и непрерывен. Множество регулярных значений оператора $\mathcal{A}$ называется резольвентным множеством $\rho(\mathcal{A})$ этого оператора, а дополнение резольвентного множества – спектром $\sigma(\mathcal{A})$ этого оператора. Спектр линейного ограниченного оператора представляет собой компакт в $\mathbb{C}$. Кроме того, в этом случае, $\sigma(\mathcal{A})$ целиком содержится в круге радиуса $\|\mathcal{A}\|$ с центром в нуле. Всякий ограниченный линейный оператор, определенный в комплексном банаховом пространстве, имеющем хотя бы один отличный от нуля элемент, имеет непустой спектр. Существуют операторы, у которых спектр состоит из единственной точки (например, оператор умножения на число).

Внутри спектра оператора можно выделять части, не одинаковые по своим свойствам. Одной из основных классификаций спектра является следующая:

1. Точечным спектром $\sigma_p(\mathcal{A})$ называется множество таких λ , при которых оператора $\mathcal{A}-\lambda I$ не инъективен. Точечный спектр является множеством всех собственных значений оператора $\mathcal{A}$; в конечномерном случае присутствует только точечный спектр;

2. Непрерывным спектром $\sigma_c(\mathcal{A})$ называется множество значений λ, при которых $(\mathcal{A}-\lambda I)^{-1}$ определена на всюду плотном множестве в E, но не является непрерывной (то есть оператор $\mathcal{A}-\lambda I$ инъективен, но не сюръективен, а его образ всюду плотен);

3. Остаточным спектром $\sigma_r(\mathcal{A})$ называется множества точек спектра, не входящих ни в точечную, ни в непрерывную части (то есть оператор $\mathcal{A}-\lambda I$ инъективен, не сюръективен, причем его образ не является всюду плотным).

Остаточный спектр выделяют по той причине, что у широкого класса операторов, например у самосопряженных операторов, он отсутствует.

Спектральный анализ операторов очень важен для математической физики. Например, в квантовой механике гамильтониан – это неограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Точечный спектр гамильтониана соответствует уровням энергии связанных состояний системы. Остальной спектр играет важную роль в теории рассеяния в системе.

Отметим, что резольвентное множество $\rho(\mathcal{A})$ открыто и $R_\lambda(\mathcal{A})$ – аналитическая операторнозначная функция на $\rho(\mathcal{A})$. Этот факт позволяет использовать при изучении $R_\lambda(\mathcal{A})$ комплексный анализ и таким способом извлекать информацию о $\mathcal{A}$.

Резольвентные операторы $R_\mu(\mathcal{A})$ и $R_\lambda(\mathcal{A})$, отвечающие точкам μ и λ, перестановочны между собой и удовлетворяют соотношению

$$R_\mu(\mathcal{A}) - R_\lambda(\mathcal{A}) = (\mu - \lambda) R_\mu(\mathcal{A}) R_\lambda(\mathcal{A}).$$

Пусть $\mathcal{A}$ – ограниченный самосопряженный оператор, а Ω – борелево множество в $\mathbb{R}$. Оператор $P_\Omega \equiv \chi_\Omega(\mathcal{A})$ называется спектральным проектором оператора $\mathcal{A}$.

Как следует из определения, P_Ω – ортогональный проектор. Свойства семейства проекторов $\{P_\Omega \mid \Omega$ – произвольное борелево множество$\}$ задаются при помощи следующего элементарного перевода с языка функционального исчисления:

Предложение 1.1.1. *Семейство P_Ω спектральных проекторов ограниченного самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ обладает следующими свойствами:*

1) *каждый P_Ω – ортогональный проектор;*

2) $P_\varnothing = 0, P_{(-a;a)} = I$ *для некоторого* $a > 0$*;*

3) *если* $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, *причем* $\Omega_n \cap \Omega_m = \varnothing$ *для всех* $n \neq m$, *то*

$$P_{\Omega} = s - \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n=1}^{N} P_{\Omega_n} \right);$$

4) $P_{\Omega_1} P_{\Omega_2} = P_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$.

Спектральными проекторами можно воспользоваться для изучения спектра оператора $\mathcal{A}$.

Предложение 1.1.2. $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ *тогда и только тогда, когда* $P_{(\lambda-\varepsilon;\lambda+\varepsilon)}(\mathcal{A}) \neq 0$ *при любом* $\varepsilon > 0$.

Это предложение позволяет различать два следующих типа спектров:

Мы говорим, что $\lambda \in \sigma_{ess}(\mathcal{A})$ – *существенному спектру* оператора $\mathcal{A}$, тогда и только тогда, когда проектор $P_{(\lambda-\varepsilon;\lambda+\varepsilon)}(\mathcal{A})$ бесконечномерен для всех $\varepsilon > 0$. Если $\lambda \in \sigma_{ess}(\mathcal{A})$, но $P_{(\lambda-\varepsilon;\lambda+\varepsilon)}(\mathcal{A})$ конечномерен для некоторого $\varepsilon > 0$, мы говорим, что $\lambda \in \sigma_{disc}(\mathcal{A})$ – *дискретному спектру* оператора $\mathcal{A}$.

Итак, мы имеем еще одного разбиение спектра $\sigma(\mathcal{A})$. В отличие от первого это разбиение на два непересекающихся подмножества. Отметим, что $\sigma_{disc}(\mathcal{A})$ не обязательно замкнут, однако $\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ всегда замкнут.

Следующие три теоремы дают другие описания $\sigma_{disc}(\mathcal{A})$ и $\sigma_{ess}(\mathcal{A})$.

Теорема 1.1.1. $\lambda \in \sigma_{disc}(\mathcal{A})$ *тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия:*

1) λ – *изолированная точка* $\sigma(\mathcal{A})$, *т.е. для некоторого* ε *имеем* $(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon) \cap \sigma(\mathcal{A}) = \{\lambda\}$;

2) λ – *собственное значение конечной кратности, т.е. множество* $\{\psi : \mathcal{A}\psi = \lambda\psi\}$ *имеет конечную размерность.*

Теорема 1.1.2. $\lambda \in \sigma_{ess}(\mathcal{A})$ *тогда и только тогда, когда выполнено по крайней мере одно из следующих условий:*

1) $\lambda \in \sigma_{cont}(\mathcal{A})$;

2) $\lambda -$ *предельная точка* $\sigma_p(\mathcal{A})$ *;*

3) $\lambda -$ *собственное значение бесконечной кратности.*

Теорема 1.1.3 (критерий Вейля). *Пусть* $\mathcal{A} -$ *ограниченный самосопряженный оператор. Тогда* $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ *в том и только в том случае, когда существует последовательность* $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такая, что* $\|\psi_n\| = 1$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \|(\mathcal{A} - \lambda I)\psi_n\| = 0.$$

При этом $\lambda \in \sigma_{ess}(\mathcal{A})$ *тогда и только тогда, когда последовательность* $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *может быть выбрана ортогональной.*

Теорема 1.1.4 (теорема Вейля о существенном спектре). *Пусть* $\mathcal{A} -$ *самосопряженный, а* $\mathcal{B} -$ *ограниченный операторы, такие, что*

1) *при некотором (а следовательно, при всех)* $z \in \rho(\mathcal{A}) \cap \rho(\mathcal{B})$ *оператор* $(\mathcal{A} - zI)^{-1} - (\mathcal{B} - zI)^{-1}$ *компактен и либо*

2) $\sigma(\mathcal{A}) \neq \mathbb{R}$ *и* $\rho(\mathcal{B}) \neq \varnothing$

либо

2′) *точки* $\rho(\mathcal{B})$ *имеются и в верхней, и в нижней полуплоскостях. Тогда* $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \sigma_{ess}(\mathcal{B})$.

Теперь сформулируем один из общих результатов теории возмущений.

Теорема 1.1.5 (Классическая теорема Вейля). Если $\mathcal{A}$ самосопряжен и $\mathcal{C}$ компактен, то $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \sigma_{ess}(\mathcal{A} + \mathcal{C})$.

Приведем один элегантный результат, который весьма полезен при изучении местоположения существенного спектра.

Теорема 1.1.6 (Аналитическая теорема Фредгольма). *Пусть* $D -$ *открытое связное подмножество в* $\mathbb{C}$. *Пусть* $f : D \to L(H) -$ *аналитическая операторнозначная функция, такая, что* $f(z) -$ *компактный оператор для каждого* $z \in D$. *Тогда либо*

1) $(I - f(z))^{-1}$ *не существует ни для какого* $z \in D$,
либо

2) $(I - f(z))^{-1}$ *существует для всех* $z \in D \setminus S$, *где* $S-$ *дискретное подмножество в* D (*т.е. множество, не имеющее предельных точек в* D).

В этом случае $(I - f(z))^{-1}$ мероморфно в D, аналитична в $D \setminus S$, ее вычеты в полюсах – операторы конечного ранга, и если $z \in S$, то уравнение $f(z)\psi = \psi$ имеет ненулевое решение в H.

Эта теорема имеет четыре важных следствия.

Теорема 1.1.7 (Альтернатива Фредгольма). *Если* $\mathcal{A}-$ *компактный оператор на* H, *то либо существует* $(I - \mathcal{A})^{-1}$, *либо имеет решение уравнение* $\mathcal{A}\psi = \psi$.

Теорема 1.1.8 (теорема Рисса-Шаудера). *Пусть* $\mathcal{A}-$ *компактный оператор на* H, *тогда* $\sigma(\mathcal{A})-$*дискретное множество, не имеюшее предельных точек, кроме, быть может,* $\lambda = 0$. *Далее, любое ненулевое* $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ *является собственным значением конечной кратности* (*т.е. соответствующее пространство собственных векторов конечномерно*).

Теорема 1.1.9 (теорема Гильберта-Шмидта). *Пусть* $\mathcal{A}-$ *самосопряженный компактный оператор на* H. *Тогда в* H *существует полный ортонормированный базис* $\{\phi_n\}$, *такой, что* $\mathcal{A}\phi_n = \lambda_n \phi_n$ *и* $\lambda_n \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Теорема 1.1.10 (каноническая форма компактного оператора). *Пусть* $\mathcal{A}-$*компактный оператор на* H. *Тогда существуют* (*не обязательно полные*) *ортонормированные множества* $\{\psi_n\}_{n=1}^{N}$ *и* $\{\phi_n\}_{n=1}^{N}$ *и положительные вещественные числа* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{N}$, *такие, что*

$$\mathcal{A} = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n (\psi_n, \cdot) \phi_n.$$

Последняя сумма, которая может быть конечной или бесконечной, равномерно сходится. Числа $\{\lambda_n\}$ называются сингулярными числами оператора $\mathcal{A}$.

Мы знаем, что многие задачи математической физики исследуется методами, разработанными для ограниченных операторов. Но некоторые вполне классические задачи не могут быть исследованы такими методами. Поэтому мы сталкиваемся с необходимостью оперировать с неограниченными линейными операторами.

Характерной особенностью неограниченных линейных операторов является то, что они определены не на всём пространстве H.

Определения спектра, точечного спектра и остаточного спектра для неограниченных операторов такие же, как и для ограниченных.

Числовая область значений. Для операторов в гильбертовом пространстве H в различных приложениях оказывается важным понятие числовой области значений (или поля значений).

Пусть $H-$комплексное гильбертово пространство и $\mathcal{A}: H \to H-$линейный оператор с областью определения $D(\mathcal{A}) \subset H$.

Числовая область значений $W(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ есть множество всех комплексных чисел $(\mathcal{A}x, x)$, где x пробегает все $D(\mathcal{A})$, $\|x\|=1$.

Из определения видно, что множество $W(\mathcal{A})$ является подмножеством комплексной плоскости и геометрические свойства множества $W(\mathcal{A})$ дают некоторую информацию об операторе $\mathcal{A}$. В общем случае множество $W(\mathcal{A})$ не является ни открытым, ни замкнутым, даже если оператор $\mathcal{A}$ замкнут.

Изучение числовой области значений линейного оператора в гильбертовом пространстве является одним из основных методов в изучении местоположения спектра таких операторов. Это понятие впервые введено в работе [26] для матриц и доказано, что числовая область значений матрицы содержит все ее собственные значения. В работе [27] показано, что числовая область значений оператора является выпуклой. Отметим, что выше сказанные результаты верны не только для матриц, но и в более общем случае для любого линейного ограниченного оператора. В работе [28] доказано, что спектр любого линейного ограниченного оператора содержится в замыкании числовой области значений этого оператора. Вслед за этим это понятие обобщено разными способами (см. например [29-34]).

Числовая область значений матрицы хорошо изучена во многих работах (см. например [35-37]). В частности, в работе [37] доказано, что числовая область значений $2\times 2-$матрицы есть эллипс. Если элементы матрицы являются линейными операторами в банаховых или гильбертовых пространствах, то такие операторы обычно называются *операторными матрицами* [см. 1] и изучение числовой области значений таких операторов в бесконечномерном пространстве представляет собой особый интерес. Поэтому исследование структуры числовой области значений операторных матриц в терминах его матричных элементов является одной из интересных задач в спектральном анализе операторов.

Отметим, что в случае, когда оператор является ограниченным и самосопряженным, замыкание числовой области значений есть выпуклая оболочка спектра.

Приведем ряд основных свойств числовой области значений линейного оператора (вообще говоря несамосопряженного) $\mathcal{A}: H \to H,$ доказательства которых вытекают непосредственно из определения:

1) Для ограниченного оператора $\mathcal{A}$ имеет место $W(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| \le \|\mathcal{A}\|\};$

2) Числовые области значений операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ связаны равенством $W(\mathcal{A}^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in W(\mathcal{A})\}$;

3) $W(I) = \{1\}$. Если α и $\beta -$произвольные комплексные числа, то имеет место равенство

$$W(\alpha\mathcal{A} + \beta) = \alpha W(\mathcal{A}) + \beta;$$

4) Если $\mathcal{A} -$самосопряженный оператор, то имеет место включение $W(\mathcal{A}) \subset \mathbb{R}$;

5) Если $H -$конечномерное пространство, то $W(\mathcal{A})$ является компактным множеством;

6) Если операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B} : H \to H$ унитарно эквивалентны, то $W(\mathcal{A}) = W(\mathcal{B})$;

7) $\sigma_p(\mathcal{A}) \subset W(\mathcal{A})$.

Определим (см. [38]) аппроксимативно точечный спектр линейного оператора $\mathcal{A}$ как

$$\sigma_{app}(\mathcal{A}) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists \{x_n\}_1^\infty \subset D(\mathcal{A}), \| x_n \| = 1, (\mathcal{A} - \lambda)x_n \to 0, n \to \infty\}.$$

Подчеркнем, что последнее множество имеет еще одно название, "ядро спектра" оператора $\mathcal{A}$ (см. [39]).

Следующее утверждение устанавливает связь между $\sigma_{app}(\mathcal{A})$ и $W(\mathcal{A})$:

8) $\sigma_{app}(\mathcal{A}) \subset \overline{W(\mathcal{A})}$.

Следующий пример показывает, что даже для ограниченного самосопряженного оператора $\mathcal{B}$ в гильбертовом пространстве H мы не сможем утверждать, что $\sigma(\mathcal{B}) \subset W(\mathcal{B})$ или $W(\mathcal{B}) \subset \sigma(\mathcal{B})$.

Пусть

$$\mathcal{B} : l_2 \to l_2, \quad \mathcal{B}x = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \ldots, \frac{1}{n}x_n, \ldots), \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in l_2.$$

Легко проверяется, что

$$\sigma(\mathcal{B}) = \overline{\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}} = \{0, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}, \quad W(\mathcal{B}) = (0,1].$$

Остановимся на доказательстве факта $0 \notin W(\mathcal{B})$. Допустим противное. Пусть $0 \in W(\mathcal{B})$. Тогда существует $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in l_2$ такой, что $\|x\| = 1$ и $(\mathcal{B}x, x) = 0$. Имеем

$$(\mathcal{B}x, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} |x_n|^2 = 0.$$

Отсюда следует, что $x \equiv \theta$. Это противоречит факту $\|x\| = 1$. Значит $0 \notin W(\mathcal{B})$. Следовательно, в этом случае имеем $\sigma(B) \not\subset W(\mathcal{B})$, $W(\mathcal{B}) \not\subset \sigma(\mathcal{B})$.

Отметим, что спектральное включение позволяет нам локализировать спектр суммы двух операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Хотя $\sigma(\mathcal{A} + \mathcal{B})$ не имеет ничего общего с $\sigma(\mathcal{A})$ и $\sigma(\mathcal{B})$, мы все равно имеем $\sigma(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \subset W(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \subset W(\mathcal{A}) + W(\mathcal{B})$.

Квадратичная числовая область значений. Заметим, что если спектр оператора $\mathcal{A}$ состоит из объединения двух непересекающихся множеств, то числовая область значений не всегда имеет достаточно хорошую структуру. Для того, чтобы получить более точную информацию о спектре в вышеуказанных случаях, в работе [40] введено понятие квадратичной числовой области значений, которая затем изучена в работах [1, 29, 41]. Квадратичная числовая область значений определена, если дано разложение $H = H_1 \oplus H_2$ и $\mathcal{A} \in L(H)$, где H_1 и H_2 − гильбертовы пространства, а $L(H)$ пространство линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H. Тогда оператор $\mathcal{A}$ всегда записывается в виде 2×2 –операторной матрицы

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{1.1.1}$$

с линейными ограниченными операторами $A_{ij} : H_j \to H_i$, $i, j = 1, 2$. Для неограниченного линейного оператора $\mathcal{A}$ в H, его область определения $D(\mathcal{A})$ необязательно должна быть разложимой как прямая сумма $D_1 \oplus D_2$ подпространств $D_1 \subset H_1$, $D_2 \subset H_2$ и следовательно, утверждение о том, что оператор $\mathcal{A}$ имеет представление (1.1.1) является дополнительным предположением. В этом случае

$$D(\mathcal{A}) = (D(A_{11}) \cap D(A_{21})) \oplus (D(A_{12}) \cap D(A_{22})).$$

Оператор $\mathcal{A}$ является самосопряженным тогда и только тогда, когда $A_{11} = A_{11}^*$, $A_{22} = A_{22}^*$ и $A_{21} = A_{12}^*$.

Множество всех собственных значений матрицы

$$\mathcal{A}_f := \begin{pmatrix} (A_{11} f_1, f_1) & (A_{12} f_2, f_1) \\ (A_{21} f_1, f_2) & (A_{22} f_2, f_2) \end{pmatrix}, \quad f = (f_1, f_2) \in H$$

таких, что $\| f_i \| = 1, i = 1,2$ называется *квадратичной числовой областью значений* оператора $\mathcal{A} \in L(H)$, соответствующей представлению (1.1.1) операторной матрицы $\mathcal{A}$ и обозначается как $W^2(\mathcal{A})$, т.е.

$$W^2(\mathcal{A}) := \bigcup_{\| f_i \| = 1,\, i=1,2} \sigma_p(\mathcal{A}_f), \quad f = (f_1, f_2) \in H.$$

В частном случае, когда $W^2(\mathcal{A})$ является вещественной, ее также можно описать с помощью формул для корней квадратного уравнения $\det(\mathcal{A}_f - \lambda) = 0$.

Следующий пример показывает, что для двух различных разложений гильбертового пространства H, могут соответствовать различные квадратичные числовые области значений (см. [1]).

Пример 1.1.1. Квадратичные числовые области значений $4 \times 4 -$ матрицы

$$M := \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -3i \\ -1 & -2 & 3i & 0 \end{pmatrix},$$

соответствующие разложениям $\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$ и $\mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^1$ являются различными.

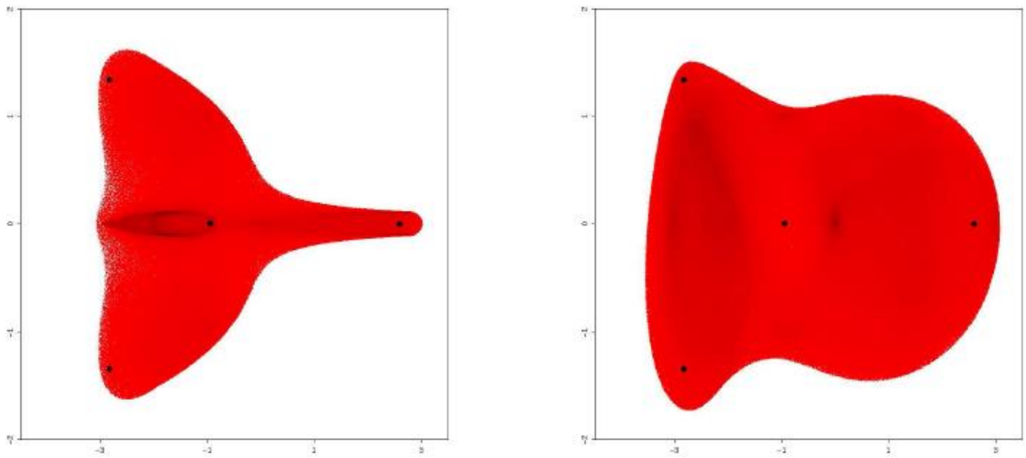

Рис. 1.1.1: Квадратичные числовые области значений M для $\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$ и $\mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^1$.

В некоторых случаях удобно воспользоваться эквивалентным описанием квадратичной числовой области значений, где используются ненулевые элементы f_1 и f_2, не обязательно имеющие нормы, равные 1.

Для $f_i \in H_i \setminus \{\theta\},\ i = 1,2$, определим

$$\hat{\mathcal{A}}_f := \left(\frac{(A_{ij} f_j, f_i)}{\| f_i \| \cdot \| f_j \|} \right)^2$$

и

$$\Delta(f_1, f_2; \lambda) := \det \begin{pmatrix} (A_{11} f_1, f_1) - \lambda (f_1, f_1) & (A_{12} f_2, f_1) \\ (A_{21} f_1, f_2) & (A_{22} f_2, f_2) - \lambda (f_2, f_2) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$W^2(\mathcal{A}) = \bigcup_{f_i \in H_i \setminus \{\theta\},\, i=1,2} \sigma_p(\mathcal{A}_f) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \exists f_i \in H_i \setminus \{\theta\}, i = 1,2, \det(\mathcal{A}_f - \lambda) = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \exists f_i \in H_i \setminus \left\{\theta\right\}, i = 1,2,\ \ \Delta(f_1, f_2; \lambda) = 0 \right\}.$$

Квадратичная числовая область значений всегда содержится в числовой области значений: $W^2(\mathcal{A}) \subset W(\mathcal{A})$.

Аналогично числовой областы значений, квадратичная числовая область значений ограниченной операторной матрицы $\mathcal{A}$ является ограниченным подмножеством комплексной плоскости $\mathbb{C}$:

$$W^2(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \|\lambda\| \le \|A\|\},$$

и оно замкнуто если $\dim H < \infty$. В отличие от числовой области значений, квадратичная числовая область значений, состоит из не более двух (связанных) компонент. Это следует из того факта, что множество всех матриц $\mathcal{A}_f$, $f = (f_1, f_2)$, $\|f_i\| = 1, i = 1,2$ связано, и из непрерывности собственных значений матриц. Если например операторная матрица $\mathcal{A}$ имеет нижнюю или верхнюю треугольную форму, т.е.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{или} \qquad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

то

$$W^2(\mathcal{A}) = W(A_{11}) \cup W(A_{22}).$$

Следовательно, квадратичная числовая область значений, вообще говоря, невыпуклая. Следующий пример показывает, что даже его компоненты не могут быть выпуклыми, (см. [1]).

Пример 1.1.2. Рассмотрим $4 \times 4 -$ матрицу

$$M := \begin{pmatrix} 2 & i & 1 & 3+i \\ i & 2 & 3+i & 1 \\ 1 & 3+i & -2 & i \\ 3+i & 1 & i & -2 \end{pmatrix}$$

относительно разложения $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$. На рисунке 1.1.2 показано, что квадратичная числовая область значений M состоит из двух непересекающихся невыпуклых компонентов.

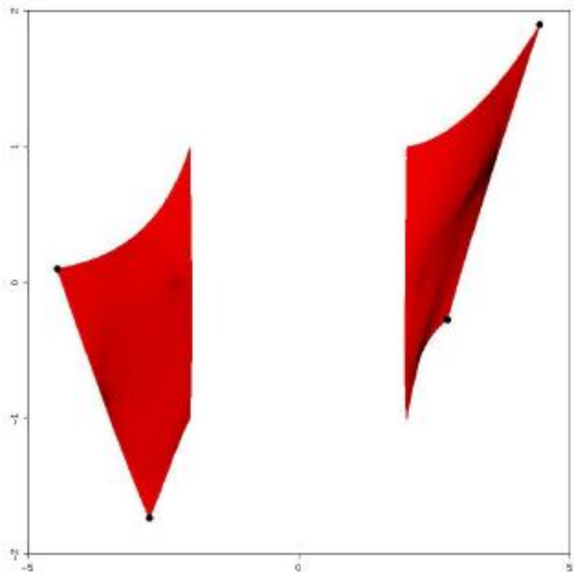

Рис. 1.1.2. Квадратичная числовая область значении M относительно разложения $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$.

Заметим также, что тот факт, что все матрицы $\mathcal{A}_f$, $f = (f_1, f_2)$, $\|f_i\| = 1, i = 1,2$ имеют два разных собственных значения, вовсе не означает, что $W^2(\mathcal{A})$ состоит из двух непересекающихся компонентов.

Квадратичная числовая область значений обладает некоторыми аналогичными свойствами числовой области значений. Например, свойства спектральных включений для $2\times 2-$ограниченных операторных матриц

$$\sigma_p(\mathcal{A}) \subset W^2(\mathcal{A}), \quad \sigma_{app}(\mathcal{A}) \subset \overline{W^2(\mathcal{A})}.$$

А для свойства спектральных включений для неограниченных $2\times 2-$операторных матриц понадобятся дополнительные условия [41].

Пространство Фока. Через $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ обозначим множества всех комплексных, вещественных, целых и натуральных чисел, соответственно.

Пусть $H-$гильбертово пространство; обозначим через $H^n -$ n-кратное тензорное произведение $H^n = H \otimes H \otimes \ldots \otimes H$. Положим $H^0 = \mathbb{C}$ и

$$\mathcal{F}(H) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^n.$$

$\mathcal{F}(H)$ называется пространством Фока над H; оно сепарабельно, если сепарабельно H. Пусть $\mathrm{d} \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ – d-мерный тор, т.е. куб $(-\pi, \pi]^{\mathrm{d}}$ с соответствующим отождествлением противоположных граней. Всюду в диссертации $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ рассматривается как абелева группа, в которой операции сложения и умножения на вещественное число введены как операции сложения и умножения на вещественное число в $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ по модулю $(2\pi\mathbb{Z})^{\mathrm{d}}$. Если $\mathrm{d} = 4$ и

$$a = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right), \quad b = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right) \in \mathbb{T}^4,$$

то

$$a + b = \left(-\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \pi, -\frac{5\pi}{6}\right), \quad 12a = \left(0, 0, \pi, 0\right) \in \mathbb{T}^4.$$

Если $H = L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, то элемент $f \in \mathcal{F}(H)$ есть последовательность функций

$$f = \{ f_0, f_1(t_1), f_2(t_1, t_2), \ldots \},$$

такая, что

$$|f_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^n} | f(t_1, t_2, \ldots, t_n)|^2 \, dt_1 dt_2 \ldots dt_n < \infty.$$

Обычно в квантовой теории поля употребляется не само $\mathcal{F}(H)$ а два его подпространства. Эти подпространства строятся так. Пусть $\mathcal{P}_n$ – группа перестановок n элементов, и пусть $\{\varphi_k\}$ – базис в H. Для каждого $\sigma \in \mathcal{P}_n$ определим оператор (будем обозначать его тоже σ) на базисных элементах H^n, полагая

$$\sigma(\varphi_{k_1} \otimes \varphi_{k_2} \otimes \ldots \otimes \varphi_{k_n}) = \varphi_{k_{\sigma(1)}} \otimes \varphi_{k_{\sigma(2)}} \otimes \ldots \otimes \varphi_{k_{\sigma(n)}}.$$

Оператор σ по линейности продолжается до ограниченного (с единичной нормой) оператора на H^n, и можно положить

$$S_n = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathcal{P}_n}\sigma.$$

Легко показать, что $S_n^2 = S_n$ и $S_n^* = S_n$, так что S_n – ортогональный проектор. Область значений оператора S_n называется n-кратным симметричным тензорным произведением H. Если $H = L_2(\mathbb{T}^d)$ и

$$H^n = L_2(\mathbb{T}^d)\otimes\ldots\otimes L_2(\mathbb{T}^d) = L_2((\mathbb{T}^d)^n),$$

то $S_n H^n$ есть подпространство в $L_2((\mathbb{T}^d)^n)$, состоящее из всех функций, инвариантных относительно любых перестановок их аргументов. Положим теперь

$$\mathcal{F}_s(L_2(\mathbb{T}^d)) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_n H^n.$$

$\mathcal{F}_s(L_2(\mathbb{T}^d))$ называется симметричным или бозонным пространством Фока над $L_2(\mathbb{T}^d)$.

Пусть $\varepsilon(\cdot)$ – функция из $\mathcal{P}_n$ в $\{1,-1\}$, равная 1 на четных и -1 на нечетных перестановках. Положим

$$A_n = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathcal{P}_n}\varepsilon(\sigma)\sigma;$$

тогда A_n есть ортогональный проектор в H^n. Его область значений $A_n H^n$ называется n-кратным антисимметричным тензорным произведением H. Если $H = L_2(\mathbb{T}^d)$, то $A_n H^n$ есть подпространство в $L_2((\mathbb{T}^d)^n)$, состоящее из функций, нечетных относительно перестановки двух координат. Подпространство

$$\mathcal{F}_a(L_2(\mathbb{T}^d)) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n H^n$$

называется антисимметричным или фермионным пространством Фока над $L_2(\mathbb{T}^d)$

Для $m \geq 2$ обозначим через $\mathcal{F}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^d))$ прямую сумму пространств $S_0 H^0$, $S_1 H^1$, . . . , $S_{m-1} H^{m-1}$, т.е.

$$\mathcal{F}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^d)) := \bigoplus_{n=0}^{m-1} S_n H^n.$$

Пространство $\mathcal{F}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$ называется $m-$частичным обрезанным подпространством Фоковского пространства.

Если

$$f=(f_0,f_1,f_2,\ldots,f_m),\ g=(g_0,g_1,g_2,\ldots,g_m)\in\mathcal{F}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})),$$

то их скалярное произведение определяется равенством:

$$(f,g):=(f_0,g_0)+(f_1,g_1)+(f_2,g_2)+\ldots+(f_m,g_m);$$

где

$$(f_0,g_0)=f_0\overline{g_0},$$

$$(f_n,g_n)=\int\limits_{(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^n} f_i(t_1,t_2,\ldots,t_n)\overline{g_k(t_1,t_2,\ldots,t_n)}dt_1dt_2\ldots dt_n,n=\overline{1,m-1}.$$

Норма элемента $f=(f_0,f_1,f_2,\ldots,f_m)\in\mathcal{F}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$ определяется следующим образом:

$$\|f\|:=\sqrt{\sum_{n=0}^{m-1}\|f_n\|^2},$$

где

$$\|f_0\|:=|f_0|,\ \|f_n\|:=\sqrt{\int\limits_{(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^n}|f(t_1,t_2,\ldots,t_n)|^2\,dt_1dt_2\ldots dt_n},\ \ n=\overline{1,m-1}.$$

§1.2. Асимптотические формулы для дискретного спектра одного класса самосопряженных неограниченных $2\times2-$ операторных матриц

Пусть H_1, H_2-два сепарабельные гильбертовы пространства.

В настоящем параграфе рассмотрим класс $2\times2-$ операторных матриц $\mathcal{A}$ вида (1.1.1) в прямой сумме $H=H_1\oplus H_2$ со следующими условиями: $A_{11}:H_1\to H_1-$линейный ограниченный самосопряженный оператор, $A_{12}:H_2\to H_1-$ линейный ограниченный оператор, $A_{21}=A_{12}^*$, и $A_{22}:H_2\supset D(A_{22})\to H_2-$линейный вообще говоря неограниченный самосопряженный оператор. Тогда оператор $\mathcal{A}$ является линейным самосопряженным оператором в пространстве H с областью определения $D(\mathcal{A}) = H_1 \oplus D(A_{22})$. Используя информацию о матричных элементах, исследуем ряд спектральных свойств операторной матрицы $\mathcal{A}$.

Введем в H операторные матрицы

$$\mathcal{A}_0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{V} := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & 0 \end{pmatrix},$$

тогда $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0^*$ и $\mathcal{V} = \mathcal{V}^*$ такие, что $D(\mathcal{A}_0) = D(\mathcal{A})$ и $D(\mathcal{V}) = H$. Следовательно, оператор $\mathcal{A}$ записывается как $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{V}$.

Рассмотрим случай, когда разность резольвент в некоторой точке (следовательно, при всех) $z \in \rho(\mathcal{A}) \cap \rho(\mathcal{A}_0)$ конечномерна:

$$\mathcal{T}(z) := (\mathcal{A} - zI)^{-1} - (\mathcal{A}_0 - zI)^{-1}, \; rank\mathcal{T}(z) = \dim R(\mathcal{T}(z)) = r < \infty, \tag{1.2.1}$$

где $I -$ единичный оператор в H. Тогда (даже если $\mathcal{T}(z)$ только компактно) в силу теоремы 1.1.6 имеет место равенство $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \sigma_{ess}(\mathcal{A}_0)$.

Рассмотрим типичный случай, когда выполняется условие (1.2.1).

Лемма 1.2.1. *Если* $rank\, \mathcal{V} = r < \infty$, *то имеет место условие* (1.2.1).

Доказательство. Для полноты приведем краткое доказательство (см. также [39]). Легко можно проверить, что если $z \in \rho(\mathcal{A}) \cap \rho(\mathcal{A}_0)$, то

$$\mathcal{T}(z) = (\mathcal{A} - zI)^{-1} \mathcal{V} (\mathcal{A}_0 - zI)^{-1} \tag{1.2.2}$$

и $(\mathcal{A}_0 - zI)^{-1}$, $(\mathcal{A} - zI)^{-1}$ являются ограниченными операторами. Теперь, используя соотношение для ранга произведения ограниченных операторов

$$rank(A_1 A_2 \cdots A_n) \le \min\{rank\, A_1, rank\, A_2, \ldots, rank\, A_n\},$$

имеем $rank\,\mathcal{T}(z) \le rank\,\mathcal{V}$. Однако фактически $rank\,\mathcal{T}(z) = r$, так как «крайние» множители в правой части (1.2.2) обратимы и не могут понизить ранг произведения. Лемма 1.2.1 доказана.

Лемма 1.2.1 соответствует случаю конечномерных возмущений. Разумеется, (1.2.1) может выполняться и без того, чтобы удовлетворялись условия леммы 1.2.1 (см. [39]).

Лемма 1.2.2. *Если* $z \in \rho(\mathcal{A}) \cap \rho(\mathcal{A}_0)$ *и оператор* $\mathcal{V}(\mathcal{A}_0 - zI)^{-1}$ *является компактным, то оператор* $\mathcal{T}(z)$ *также является компактным.*

Доказательство. Доказательство леммы вытекает из ограниченности оператора $(\mathcal{A} - zI)^{-1}$ при $z \in \rho(\mathcal{A})$ и из соотношения (1.2.2).

Замечание 1.2.1. *Из определения оператора* $\mathcal{V}$ *видно, что он имеет конечный ранг тогда и только тогда, когда операторы* A_{11}, A_{12} *имеют конечный ранг.*

Рассмотрим следующий пример.

Пусть $X_1 := \mathbb{C}$, $X_2 := L_2[-\pi, \pi]$, $X_3 := l_2(\mathbb{N})$, где

$$l_2(\mathbb{N}) := \{x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) : x_k \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty\}.$$

Рассмотрим оператор $\mathcal{B}$, действующий в гильбертовом пространстве $X_1 \oplus X_2 \oplus X_3$ как $3 \times 3-$операторная матрица:

$$\mathcal{B} := \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12}^* & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} \end{pmatrix}.$$

Здесь матричные элементы определяются следующим образом:

$$B_{11} f_1 = w_1 f_1, \quad B_{12} f_2 = \int_{-\pi}^{\pi} v(t) f_2(t) dt; \quad f_1 \in \mathbb{C}, \quad f_2 \in L_2[-\pi, \pi];$$

$$(B_{22} f_2)(x) = w_2(x) f_2(x),$$

$$B_{33} f_3 = (f_{31}, 2 f_{32}, \ldots, n f_{3n}, \ldots), \; f_3 = (f_{31}, \ldots, f_{3n}, \ldots) \in l_2(\mathbb{N}).$$

При этом w_1 – фиксированное вещественное число, $v(\cdot)$ и $w_2(\cdot)$ – вещественнозначные непрерывные функции на $[-\pi,\pi]$. Очевидно, что

$$(B_{12}^* f_1)(x) = v(x) f_1, \quad f_1 \in \mathbb{C}$$

и

$$D(B_{33}) = \{ f_3 = (f_{31}, f_{32}, \ldots, f_{3n}, \ldots) \in l_2(\mathbb{N}) : \sum_{n=1}^{\infty} | n f_{3n} |^2 < \infty \}.$$

Если обозначим $H_1 := X_1$, $H_2 := X_2 \oplus X_3$,

$$A_{11} := B_{11}, \quad A_{12} := (B_{12}\ 0), \quad A_{22} := \begin{pmatrix} B_{22} & 0 \\ 0 & B_{33} \end{pmatrix},$$

то 3×3 – операторная матрица $\mathcal{B}$ записывается как 2×2 – операторная матрица вида (1.1.1), а также имеет место равенство $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) = [m;M]$ и $rank\mathcal{V} = 2$, где числа m и M определяются следующим образом:

$$m := \min_{x\in[-\pi,\pi]} w_2(x), \quad M := \max_{x\in[-\pi,\pi]} w_2(x).$$

Тем самым имеет место (1.2.1).

Асимптотика дискретного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}$. Начнем исследование дискретного спектра оператора $\mathcal{A}$. Для интервала $\Delta \subset \mathbb{R}$ подпространство $E_\Delta(\mathcal{A})$ означает спектральное подпространство оператора $\mathcal{A}$, соответствующее интервалу Δ. Обозначим через $N_{(a;b)}(\mathcal{A})$ число собственных значений оператора $\mathcal{A}$, с учетом кратности, лежащих в $(a;b) \subset \mathbb{R} \setminus \sigma_{ess}(\mathcal{A})$, т.е.

$$N_{(a;b)}(\mathcal{A}) = \dim E_{(a;b)}(\mathcal{A}) H.$$

Основным результатом настоящего параграфа является следующая теорема.

Теорема 1.2.1. *Пусть операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_0$ удовлетворяют условию* (1.2.1) *и предположим, что существенный спектр оператора $\mathcal{A}_0$ имеет следующий вид:*

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}_0) \setminus \{\infty\} = \bigcup_{n=1}^{m} [a_{2n-1}; a_{2n}], \qquad (1.2.3)$$

$a_1 < a_2 < \ldots < a_{2m}$ и $m < \infty$. *Пусть* a_0 и a_{2m+1} *– фиксированные вещественные числа, для которых справедливы условия* $a_0 < a_1$ и $a_{2m+1} > a_{2m}$. *Тогда для любых* $n = 0,\ldots,m$ *имеем*

$$N_{(a_{2n};a_{2n+1})}(\mathcal{A}) = \infty \Leftrightarrow N_{(a_{2n};a_{2n+1})}(\mathcal{A}_0) = \infty.$$

Если $N_{(a_{2n};a_{2n+1})}(\mathcal{A}) = \infty$, *то по крайней мере одна из точек* a_{2n}, a_{2n+1} (*кроме точек* a_0 *и* a_{2m+1}) *является точкой накопления собственных значений и*

$$\lim_{z \searrow a_{2n}} \frac{N_{(z;a_{2n+1}-\delta_n)}(\mathcal{A})}{N_{(z;a_{2n+1}-\delta_n)}(\mathcal{A}_0)} = 1 \text{ (}\textit{если } a_{2n} \textit{ есть точка накопления}\text{)}$$

$$\lim_{z \nearrow a_{2n+1}} \frac{N_{(a_{2n}+\delta_n;z)}(\mathcal{A})}{N_{(a_{2n}+\delta_n;z)}(\mathcal{A}_0)} = 1 \text{ (}\textit{если } a_{2n+1} \textit{ есть точка накопления}\text{)} \tag{1.2.4}$$

где $0 < \delta_n < a_{2n+1} - a_{2n}$

Доказательство. Пусть $n = 0,\ldots,m$. Из условия (1.2.1), в частности, следует, что $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \sigma_{ess}(\mathcal{A}_0)$. Следовательно, для любого $z \in (a_{2n} + \delta_n; a_{2n+1})$ имеем

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}_0) \cap [a_{2n} + \delta_n; z] = \varnothing.$$

Это означает, что для таких z оба числа $N_{(a_{2n}+\delta_n;z)}(\mathcal{A}_0)$ и $N_{(a_{2n}+\delta_n;z)}(\mathcal{A})$ являются конечными. В силу теоремы 9.3.3 из [39] получим

$$N_{(a_{2n}+\delta_n;\,z)}(\mathcal{A}_0) - r \le N_{(a_{2n}+\delta_n;\,z)}(\mathcal{A}) \le N_{(a_{2n}+\delta_n;\,z)}(\mathcal{A}_0) + r, \tag{1.2.5}$$

$$z \in (a_{2n} + \delta_n; a_{2n+1}).$$

Аналогично можно показать, что

$$N_{(z;a_{2n+1}-\delta_n)}(\mathcal{A}_0) - r \le N_{(z;a_{2n+1}-\delta_n)}(\mathcal{A}) \le N_{(z;a_{2n+1}-\delta_n)}(\mathcal{A}_0) + r, \tag{1.2.6}$$

$$z \in (a_{2n} + \delta_n; a_{2n+1}).$$

Из оценок (1.2.5) и (1.2.6), а также из конечности числа r следует, что если оператор $\mathcal{A}_0$ имеет бесконечно много собственных значений в интервале $(a_{2n};a_{2n+1})$, накапливающихся по крайней мере к одному концу этого интервала, то такое утверждение верно для оператора $\mathcal{A}$ в интервале $(a_{2n};a_{2n+1})$ и обратно.

Соотношение (1.2.4) вытекает из оценок (1.2.5) и (1.2.6). Теорема 1.2.1 доказана.

§1.3. Исследование спектра одного семейства $2\times 2-$ операторных матриц.

В настоящем параграфе в отличие от предыдущего исследуется дискретный спектр одного семейства $2\times 2-$ операторных матриц с неограниченным существенным спектром.

Пусть H_i', $i=1,2-$произвольные гильбертовы пространства и $H_i:=l_2(\mathbb{N})\oplus H_i'$, $i=1,2$. Рассмотрим следующие $2\times 2-$операторные матрицы $A_{ij}:H_j\to H_i$:

$$A_{11}:=\begin{pmatrix} A_{11}^{(1)} & 0\\ 0 & A_{11}^{(2)}\end{pmatrix},\quad A_{12}:=\begin{pmatrix} A_{12}^{(1)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad A_{22}:=\begin{pmatrix} A_{22}^{(1)} & 0\\ 0 & A_{22}^{(2)}\end{pmatrix},$$

где операторы $A_{11}^{(1)}, A_{12}^{(1)}, A_{22}^{(1)}:l_2(\mathbb{N})\to l_2(\mathbb{N})$ определены по формулам:

$$A_{11}^{(1)}(x_1,\ldots,x_n,\ldots)=(a_{11}^{(1,1)}x_1,\ldots,a_{11}^{(1,n)}x_n,\ldots);$$
$$A_{12}^{(1)}(x_1,\ldots,x_n,\ldots)=(a_{12}^{(1,1)}x_1,\ldots,a_{12}^{(1,n)}x_n,\ldots);$$
$$A_{22}^{(1)}(x_1,\ldots,x_n,\ldots)=(a_{22}^{(1,1)}x_1,\ldots,a_{22}^{(1,n)}x_n,\ldots);$$

$(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)\in l_2(\mathbb{N})$ а операторы $A_{11}^{(2)}:H_1'\to H_1'$ и $A_{22}^{(2)}:H_2'\to H_2'$ произвольные линейные самосопряженные операторы, удовлетворяющие условиям

$$\sigma(A_{11}^{(2)})=\sigma_{ess}(A_{11}^{(2)})=(-\infty;a_{11}^{(2)}],\quad \sigma(A_{22}^{(2)})=\sigma_{ess}(A_{22}^{(2)})=[a_{22}^{(2)};\infty),$$

для некоторых $a_{11}^{(2)}, a_{22}^{(2)}\in\mathbb{R}$. Дополнительно будем предполагать, что $\{a_{11}^{(1,n)}\}_1^\infty$, $\{a_{22}^{(1,n)}\}_1^\infty\subset\mathbb{R}$ и

$$\lim_{n\to\infty}a_{11}^{(1,n)}=a_{11}^{(2)},\ \lim_{n\to\infty}a_{22}^{(1,n)}=a_{22}^{(2)}\quad (a_{11}^{(1,n)}>a_{11}^{(2)},\quad a_{22}^{(1,n)}<a_{22}^{(2)},\quad n\in\mathbb{N});$$

$$\lim_{n\to\infty}a_{12}^{(1,n)}=a_{12}^{(1)}\quad (a_{12}^{(1)}\neq 0),\quad \sup_n a_{11}^{(1,n)}<\inf_n a_{22}^{(1,n)}.$$

Отметим, что в этих предположениях $a_{11}^{(2)} < a_{22}^{(2)}$.

Воспользовавшись элементами функционального анализа, можно показать, что операторы $A_{11}^{(1)}, A_{12}^{(1)}$ и $A_{22}^{(1)}$ являются ограниченными, причем операторы $A_{11}^{(1)}$ и $A_{22}^{(1)}$ являются самосопряженными. Самосопряженность оператора $A_{12}^{(1)}$ зависит от $\{a_{12}^{(1,n)}\}_1^\infty$. Если $\{a_{12}^{(1,n)}\}_1^\infty \subset \mathbb{R}$, то $A_{12}^{(1)}$ является самосопряженным, в противном случае несамосопряженным оператором.

Из условий, налагаемых на операторы $A_{11}^{(2)}$ и $A_{22}^{(2)}$, видно, что они являются самосопряженными полуограниченными операторами, точнее, оператор $A_{11}^{(2)}$ ограничен сверху, а оператор $A_{22}^{(2)}$ ограничен снизу.

Пусть $H := H_1 \oplus H_2$. Рассмотрим семейство $2\times 2-$ операторных матриц $\mathcal{A}_t,\ t \in \mathbb{R}$, следующего вида:

$$\mathcal{A}_t := \begin{pmatrix} A_{11} & tA_{12} \\ tA_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix} : H \to H.$$

Учитывая условия, налагаемые на операторы A_{11}, A_{12}, A_{22}, можно показать, что оператор $\mathcal{A}_t, t \in \mathbb{R}$, является самосопряженным неограниченным оператором и

$$D(\mathcal{A}_t) := (l_2(\mathbb{N}) \oplus D(A_{11}^{(2)})) \oplus (l_2(\mathbb{N}) \oplus D(A_{22}^{(2)})).$$

Из определения оператора $\mathcal{A}_0$ видно, что $\sigma(\mathcal{A}_0) = \sigma(A_{11}) \cup \sigma(A_{22})$.

Следующая лемма описывает расположение спектров операторов A_{11} и A_{22}.

Лемма 1.3.1. *Для спектра операторов* A_{11} и A_{22} *имеет место неравенство*

$$\max \sigma(A_{11}) < \min \sigma(A_{22}).$$

Доказательство. Из определения операторов A_{11} и A_{22} вытекает, что

$$\sigma(A_{11}) = (-\infty; a_{11}^{(2)}] \cup \{a_{11}^{(1,1)}, \ldots, a_{11}^{(1,n)}, \ldots\},$$
$$\sigma(A_{22}) = [a_{22}^{(2)}; \infty) \cup \{a_{22}^{(1,1)}, \ldots, a_{22}^{(1,n)}, \ldots\}.$$

По предположению

$$\sup_n a_{11}^{(1,n)} < \inf_n a_{22}^{(1,n)}.$$

Доказательство леммы 1.3.1 вытекает из последних соотношений.

Теперь наряду с оператором $\mathcal{A}_t, t \in \mathbb{R}$, рассмотрим семейство ограниченных самосопряженных операторов $\mathcal{V}_t,\ t \in \mathbb{R}$, вида

$$\mathcal{V}_t := \begin{pmatrix} A_{11}^{(1)} & tA_{12}^{(1)} \\ t(A_{12}^{(1)})^* & A_{22}^{(1)} \end{pmatrix} : l_2(\mathbb{N}) \oplus l_2(\mathbb{N}) \to l_2(\mathbb{N}) \oplus l_2(\mathbb{N}).$$

Следующая лемма описывает точный вид спектра оператора $\mathcal{V}_t,\ t \in \mathbb{R}$.

Лемма 1.3.2. *Для дискретного и существенного спектров оператора $\mathcal{V}_t,\ t \in \mathbb{R}$, имеют место равенства*

$$\sigma_{disc}(\mathcal{V}_t) = \{\lambda_n^{\pm}(t)\}_1^{\infty}, \quad \sigma_{ess}(\mathcal{V}_t) = \{\lim_{n\to\infty} \lambda_n^{\pm}(t)\},$$

где числа $\lambda_n^{\pm}(t),\ n \in \mathbb{N}$, определены по формуле

$$\lambda_n^{\pm}(t) := \frac{a_{11}^{(1,n)} + a_{22}^{(1,n)} \pm \sqrt{(a_{11}^{(1,n)} - a_{22}^{(1,n)})^2 + 4t^2 |a_{12}^{(1,n)}|^2}}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение для собственного значения

$$\mathcal{V}_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

которое эквивалентно системе уравнений

$$(A_{11}^{(1)} - \lambda E)x + tA_{12}^{(1)} y = 0;$$

$$t(A_{12}^{(1)})^* x + (A_{22}^{(1)} - \lambda E) y = 0;$$

где $E-$единичный оператор в $l_2(\mathbb{N}), x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, $y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots) \in l_2(\mathbb{N})$. Последнюю систему можно записать в виде

$$(a_{11}^{(1,n)} - \lambda)x_n + ta_{12}^{(1,n)} y_n = 0, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$t\overline{a_{12}^{(1,n)}} x_n + (a_{22}^{(1,n)} - \lambda) y_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Эта система уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда

$$\Delta_n(\lambda;t) := \lambda^2 - (a_{11}^{(1,n)} + a_{22}^{(1,n)})\lambda + a_{11}^{(1,n)} a_{22}^{(1,n)} - t^2 |a_{12}^{(1,n)}|^2 = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что числа $\lambda_n^{\pm}(t),\ n \in \mathbb{N}$, являются нулями функции $\Delta_n(\cdot;t),\ n \in \mathbb{N}$, т.е. являются собственными значениями оператора $\mathcal{V}_t,\ t \in \mathbb{R}$. Из сходимости последовательностей $\{a_{11}^{(1,n)}\}_1^{\infty}$, $\{a_{12}^{(1,n)}\}_1^{\infty}$, $\{a_{22}^{(1,n)}\}_1^{\infty}$ и условий

$$a_{11}^{(1,n)} > a_{11}^{(2)}, \quad a_{22}^{(1,n)} < a_{22}^{(2)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

вытекает, что эти собственные значения являются конечнократными и изолированными. Это и означает, что $\lambda_n^{\pm}(t) \in \sigma_{disc}(\mathcal{V}_t), \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}$,

т.е.

$$\{\lambda_n^{\pm}(t)\}_1^{\infty} \subset \sigma_{disc}(\mathcal{V}_t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.3.1}$$

Пусть

$$\lambda_0^{\pm}(t) := \lim_{n\to\infty} \lambda_n^{\pm}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Существование этого предела вытекает из сходимости последовательностей $\{a_{11}^{(1,n)}\}_1^{\infty}$, $\{a_{12}^{(1,n)}\}_1^{\infty}$, $\{a_{22}^{(1,n)}\}_1^{\infty}$. Тогда в силу теоремы 1.1.2 точка $\lambda_0^{\pm}(t)$ как предельная точка $\sigma_{disc}(\mathcal{V}_t)$ принадлежит $\sigma_{ess}(\mathcal{V}_t)$, т.е.

$$\lambda_0^{\pm}(t) \in \sigma_{ess}(\mathcal{V}_t), \ \ t \in \mathbb{R}. \tag{1.3.2}$$

Теперь докажем, что $\sigma(\mathcal{V}_t) \subset \{\lambda_n^{\pm}(t)\}_1^{\infty} \cup \{\lambda_0^{\pm}(t)\}, \quad t \in \mathbb{R}$.

Пусть $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\{\lambda_n^{\pm}(t)\}_1^{\infty} \cup \{\lambda_0^{\pm}(t)\})$ – произвольная точка. Тогда из приведенных выше рассуждений следует, что

$$\Delta_n(\lambda;t) \neq 0, \ n \in \mathbb{N} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \Delta_n(\lambda;t) \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

При этом существует оператор $(\mathcal{V}_t - \lambda)^{-1}$, определенный всюду в $l_2(\mathbb{N}) \oplus l_2(\mathbb{N})$, и он ограничен. Это означает, что $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(\mathcal{V}_t)$. Из произвольности точки λ следует, что

$$\mathbb{C} \setminus (\{\lambda_n^{\pm}(t)\}_1^{\infty} \cup \{\lambda_0^{\pm}(t)\}) \subset \mathbb{C} \setminus \sigma(\mathcal{V}_t), \quad t \in \mathbb{R},$$

т.е.

$$\sigma(\mathcal{V}_t) \subset \{\lambda_n^{\pm}(t)\}_1^{\infty} \cup \{\lambda_0^{\pm}(t)\}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.3.3}$$

Включения (1.3.1) - (1.3.3) доказывают утверждение леммы 1.3.2.

Следующая теорема описывает спектр оператора $\mathcal{A}_t,\ t\in\mathbb{R}$.

Теорема 1.3.1. *Для существенного и дискретного спектров оператора* $\mathcal{A}_t,\ t\in\mathbb{R}$, *имеют место равенства*

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}_t)=\sigma(A_{11}^{(2)})\cup\sigma(A_{22}^{(2)})\cup\sigma_{ess}(\mathcal{V}_t),\quad t\in\mathbb{R};$$

$$\sigma_{disc}(\mathcal{A}_t)=\sigma_{disc}(\mathcal{V}_t)\cap(a_{11}^{(2)},a_{22}^{(2)}),\quad t\in\mathbb{R}.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы 1.3.1 сначала оператор $\mathcal{A}_t,\ t\in\mathbb{R}$, представим как семейство $4\times4-$операторных матриц вида

$$\mathcal{A}_t=\begin{pmatrix} A_{11}^{(1)} & 0 & tA_{12}^{(1)} & 0\\ 0 & A_{11}^{(2)} & 0 & 0\\ t(A_{12}^{(1)})^* & 0 & A_{22}^{(1)} & 0\\ 0 & 0 & 0 & A_{22}^{(2)}\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Из этого представления оператора $\mathcal{A}_t,\ t\in\mathbb{R}$, видно, что

$$\sigma(\mathcal{A}_t)=\sigma(A_{11}^{(2)})\cup\sigma(A_{22}^{(2)})\cup\sigma(\mathcal{V}_t),\quad t\in\mathbb{R},$$

откуда вытекает доказательство теоремы 1.3.1.

Теперь сформулируем теорему о конечности дискретного спектра оператора $\mathcal{A}_{t_0},\ t_0\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Теорема 1.3.2. *При каждом фиксированном* $t_0\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *дискретный спектр оператора* $\mathcal{A}_{t_0}$, *конечен.*

Доказательство. В силу теоремы 1.3.1 верно соотношение $\sigma_{disc}(\mathcal{A}_{t_0})=\sigma_{disc}(\mathcal{V}_{t_0})\cap(a_{11}^{(2)};a_{22}^{(2)})$. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n^+(t_0)=\frac{a_{11}^{(2)}+a_{22}^{(2)}+\sqrt{(a_{11}^{(2)}-a_{22}^{(2)})^2+4t_0^2\,|\,a_{12}^{(1)}\,|^2}}{2}>a_{22}^{(2)},$$

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n^-(t_0)=\frac{a_{11}^{(2)}+a_{22}^{(2)}-\sqrt{(a_{11}^{(2)}-a_{22}^{(2)})^2+4t_0^2\,|\,a_{12}^{(1)}\,|^2}}{2}<a_{11}^{(2)},$$

только конечное число элементов последовательностей $\{\lambda_n^{\pm}(t_0)\}_1^{\infty}$ лежит в интервале $(a_{11}^{(2)};a_{22}^{(2)})$. Теорема 1.3.2 доказана.

Заметим, что при $0<|t_1|<|t_2|$ для каждого фиксированного $n\in\mathbb{N}$ имеют место неравенства

$$\lambda_n^+(t_1)<\lambda_n^+(t_2),\quad \lambda_n^-(t_1)>\lambda_n^-(t_2).$$

Более того,

$$\lim_{|t|\to\infty} \lambda_n^{\pm}(t) = \pm\infty, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Из последних фактов следует, что существует положительное число $\delta > 0$ такое, что при всех $|t| \geq \delta$ имеет место равенство $\sigma_{disc}(\mathcal{A}_t) = \varnothing$.

Замечание 1.3.1. *По построению оператора* $\mathcal{A}_0$ *видно, что этот оператор имеет бесконечное число собственных значений, лежащих в интервале* $(a_{11}^{(2)}; a_{22}^{(2)})$ *и накапливающихся к* $a_{11}^{(2)}$ и $a_{22}^{(2)}$. *В силу теоремы 1.3.2 при всех* $t \neq 0$ *дискретный спектр оператора* $\mathcal{A}_t$ *конечен. Таким образом, дискретный спектр оператора* $\mathcal{A}_t$ *бесконечен тогда и только тогда, когда* $t = 0$.

Замечание 1.3.2. *Отметим, что независимо от параметра* $t \in \mathbb{R}$ *операторы* A_{11} и A_{22} *имеют бесконечное число собственных значений, лежащих в интервале* $(a_{11}^{(2)}; a_{22}^{(2)})$ *и накапливающихся к* $a_{11}^{(2)}$ и $a_{22}^{(2)}$, *соответственно. Поэтому при* $t \neq 0$ *из бесконечности дискретного спектра операторов* A_{11} и A_{22} *не вытекает бесконечность дискретного спектра оператора* $\mathcal{A}_t$.

ГЛАВА II. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И ВИРТУАЛЬНЫЕ УРОВНИ СЕМЕЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ФРИДРИХСА

В главе II семейство обобщенных моделей Фридрихса $\mathcal{A}_\mu(k), \mu > 0, k \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ рассматривается как семейство $2\times 2-$ операторных матриц.

В первом параграфе этой главы построен определитель Фредгольма, нули которого совпадают с собственными значениями оператора $\mathcal{A}_\mu(k)$.

Второй параграф посвяшен изучению пороговых собственных значений и виртуальных уровней операторов $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ и $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi}),$ в случае $\mathrm{d}=3$, где $\bar{0}(0,0,0),$ $\bar{\pi}(\pi,\pi,\pi)\in\mathbb{T}^3.$ Изучены условия существования изолированных собственных значений операторов $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ и $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi}),$ относительно спектрального параметра $\gamma\in\mathbb{R}$ и параметра взаимодействия $\mu>0$. Получено асимптотическое разложение определителя Фредгольма относительно пары $(k;z)$ в окрестности точки $(\bar{0};0)$ и $(\bar{\pi};18)$.

В параграфе 2.3 описана структура числовой области значений обобщенной модели Фридрихса $\mathcal{A}_\mu(k_0)$ в случае совпадающих экстремумов. Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы спектр оператора $\mathcal{A}_\mu(k_0)$ совпадал с множеством $W(\mathcal{A}_\mu(k_0)).$ При этом использован метод пороговых явлений.

В четвертом параграфе главы II приведена формула для вычисления квадратичной числовой области значений оператора $\mathcal{A}_\mu(k_0)$. А также получены оценки для компонент квадратичной числовой области значений $\mathcal{A}_\mu(k_0)$.

§2.1. Существенный и дискретный спектры семейства обобщенных моделей Фридрихса.

Пусть $H_0 := \mathbb{C}$, $H_1 := L_2(\mathbb{T}^3)$ и $\hat{H} := H_0 \oplus H_1$. Рассмотрим семейство обобщенных моделей Фридрихса $\mathcal{A}_\mu(k), k \in \mathbb{T}^3$, действующих в гильбертовом пространстве $\hat{H}$ как $2\times 2-$ операторная матрица

$$\mathcal{A}_\mu(k) := \begin{pmatrix} A_{00}(k) & \mu A_{01} \\ \mu A_{01}^* & A_{11}(k) \end{pmatrix}, \tag{2.1.1}$$

где матричные элементы $A_{ii}(k): H_i \to H_i, i = 0,1, k \in \mathbb{T}^3$ и $A_{01}: H_1 \to H_0$, определяются по формулам

$$A_{00}(k) f_0 = w_0(k) f_0, \qquad A_{01} f_1 = \int_{\mathbb{T}^3} f_1(t)dt, \quad (A_{11}(k) f_1)(p) = w_1(k,p) f_1(p).$$

Здесь $f_i \in H_i, i = 0,1$; $\mu -$ вещественное положительное число, а функции $w_0(\cdot)$ и $w_1(\cdot,\cdot)$ имеют вид

$$w_0(k) := \varepsilon(k) + \gamma, \quad w_1(k,p) := \varepsilon(k) + \varepsilon(\frac{1}{2}(k+p)) + \varepsilon(p), \tag{2.1.2}$$

где функция (дисперсии) $\varepsilon(\cdot)$ задается выражением

$$\varepsilon(k) := \sum_{i=1}^{3}(1-\cos k_i), \, k = (k_1,k_2,k_3) \in \mathbb{T}^3. \tag{2.1.3}$$

Оператор A_{01} называется оператором уничтожения, а A_{01}^* называется оператором рождения и $(A_{01}^* f_0)(p) = f_0, \quad f_0 \in H_0$.

Лемма 2.1.1. *Оператор* $\mathcal{A}_\mu(k)$*, определенный операторной матрицей* (2.1.1)*, действующий в гильбертовом пространстве* $\hat{H}$ *является линейным, ограниченным и самосопряженным.*

Доказательство. В соответствии с разложением $\hat{H} := H_0 \oplus H_1$ будем записывать элементы $f = (f_0, f_1) \in \hat{H}$ в виде столбцов $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, $f_i \in H_i, i = 0,1.$

Тогда

$$\mathcal{A}_\mu(k)f=\begin{pmatrix} A_{00}(k)f_0+\mu A_{01}f_1\\ \mu A_{01}^* f_0+A_{11}(k)f_1\end{pmatrix},$$

что соответствует обычному правилу умножения матрицы на столбец.

Чтобы доказать линейность оператора $\mathcal{A}_\mu(k)$ покажем, что для любых $f=(f_0,f_1),\ g=(g_0,g_1)\in\hat{H}$ и для всех чисел $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ верно следующее равенство:

$$\mathcal{A}_\mu(k)(\alpha f+\beta g)=\alpha\mathcal{A}_\mu(k)f+\beta\mathcal{A}_\mu(k)g.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\mu(k)(\alpha f+\beta g)&=\begin{pmatrix} A_{00}(k) & \mu A_{01}\\ \mu A_{01}^* & A_{11}(k)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha f_0+\beta g_0\\ \alpha f_1+\beta g_1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} A_{00}(k)(\alpha f_0+\beta g_0)+\mu A_{01}(\alpha f_1+\beta g_1)\\ \mu A_{01}^*(\alpha f_0+\beta g_0)+A_{11}(k)(\alpha f_1+\beta g_1)\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} w_0(k)(\alpha f_0+\beta g_0)+\mu\int\limits_{\mathbb{T}^3}(\alpha f_1(t)+\beta g_1(t))dt\\ \mu(\alpha f_0+\beta g_0)+w_1(k,p)(\alpha f_1+\beta g_1)(p)\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} \alpha(w_0(k)f_0+\mu\int\limits_{\mathbb{T}^3}f_1(t)dt)+\beta(w_0(k)g_0+\mu\int\limits_{\mathbb{T}^3}g_1(t))dt\\ \alpha(\mu f_0+w_1(k,p)f_1(p))+\beta(\mu g_0+w_1(k,p)g_1(p))\end{pmatrix}\\
&=\alpha\begin{pmatrix} w_0(k)f_0+\mu\int\limits_{\mathbb{T}^3}f_1(t)dt\\ \mu f_0+w_1(k,p)f_1(p)\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} w_0(k)g_0+\mu\int\limits_{\mathbb{T}^3}g_1(t)dt\\ \mu g_0+w_1(k,p)g_1(p)\end{pmatrix}\\
&=\alpha\mathcal{A}_\mu(k)f+\beta\mathcal{A}_\mu(k)g.
\end{aligned}$$

Линейность оператора $\mathcal{A}_\mu(k)$ доказана.

Теперь докажем ограниченность оператора $\mathcal{A}_\mu(k)$. Для любого $f\in\hat{H}$ оценим квадрат нормы элемента $\mathcal{A}_\mu(k)f$ следующим образом:

$$\|\mathcal{A}_\mu(k)f\|^2=|w_0(k)f_0+\mu\int\limits_{\mathbb{T}^3}f_1(t)dt|^2+\int\limits_{\mathbb{T}^3}|\mu f_0+w_1(k,t)f_1(t)|^2\,dt\le$$

$$\le 2|w_0(k)|^2\cdot|f_0|^2+2\mu^2\int\limits_{\mathbb{T}^3}dt\int\limits_{\mathbb{T}^3}|f_1(t)|^2\,dt+2\mu^2|f_0|^2\int\limits_{\mathbb{T}^3}dt+$$

$$+2\int_{\mathbb{T}^3}|w_1(k,t)f_1(t)|^2dt \le 2|w_0(k)|^2\cdot|f_0|^2+$$

$$+2\mu^2\cdot 8\pi^3\|f_1\|^2+16\mu^2\pi^3|f_0|^2+2\max_{p\in\mathbb{T}^3}|w_1(k,p)|^2\cdot\|f_1\|^2\le$$

$$\le C^2(\mu,k)(\|f_0\|^2+\|f_1\|^2)=C^2(\mu,k)\|f\|^2,$$

где

$$C(\mu,k)=\sqrt{\max\{2|w_0(k)|^2+16\mu^2\pi^3, 16\mu^2\pi^3+2\max_{p\in\mathbb{T}^3}|w_1(k,p)|^2\}}.$$

Отсюда следует, что $\|\mathcal{A}_\mu(k)f\|\le C(\mu,k)\|f\|$, т.е. $\mathcal{A}_\mu(k)$ ограничен. Здесь мы использовали неравенство Коши-Буняковского.

Для доказательства самосопряженности оператора $\mathcal{A}_\mu(k)$ покажем, что для всех $f,g\in\hat{H}$ справедливо равенство $(\mathcal{A}_\mu(k)f,g)=(f,\mathcal{A}_\mu(k)g)$.

Используя определение скалярного произведения в $\hat{H}$ имеем

$$(\mathcal{A}_\mu(k)f,g)=(w_0(k)f_0+\mu\int_{\mathbb{T}^3}f_1(t)dt)\overline{g_0}+$$

$$+\int_{\mathbb{T}^3}(\mu f_0+w_1(k,t)f_1(t))\overline{g_1(t)}dt=w_0(k)f_0\overline{g_0}+\mu\int_{\mathbb{T}^3}f_1(t)dt\cdot\overline{g_0}+$$

$$+\int_{\mathbb{T}^3}\mu f_0\overline{g_1(t)}dt+\int_{\mathbb{T}^3}w_1(k,t)f_1(t)\overline{g_1(t)}dt=w_0(k)f_0\overline{g_0}+\mu f_0\int_{\mathbb{T}^3}\overline{g_1(t)}dt+$$

$$+\int_{\mathbb{T}^3}f_1(t)(\mu\overline{g_0}+w_1(k,t)\overline{g_1(t)})dt=f_0\overline{(w_0(k)g_0+\mu\int_{\mathbb{T}^3}g_1(t)dt)}+$$

$$+\int_{\mathbb{T}^3}f_1(t)\overline{(\mu g_0+w_1(k,t)g_1(t))}dt=(f,\mathcal{A}_\mu(k)g).$$

Самосопряженность оператора $\mathcal{A}_\mu(k)$ доказана. Тем самым лемма 2.1.1 полностью доказана.

Теперь переходим к изучению существенного спектра оператора $\mathcal{A}_\mu(k)$ Положим: $\mathcal{A}_0(k)=\mathcal{A}_\mu(k)\big|_{\mu=0}$. Очевидно, что оператор возмущения $\mathcal{A}_\mu(k)-\mathcal{A}_0(k)$ оператора $\mathcal{A}_0(k)$ является самосопряженным оператором ранга 2. Следовательно, из теоремы 1.1.4 вытекает, что существенный спектр оператора $\mathcal{A}_\mu(k)$ совпадает с существенным спектром оператора $\mathcal{A}_0(k)$.

По определению $\mathcal{A}_0(k)$ – диагональный оператор и

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}_0(k)) = [m(k), M(k)], \sigma_{disc}(\mathcal{A}_0(k)) = \{w_0(k)\},$$

где числа $m(k)$ и $M(k)$ определяются следующим образом:

$$m(k) := \min_{p\in\mathbb{T}^3} w_1(k,p), \qquad M(k) := \max_{p\in\mathbb{T}^3} w_1(k,p). \tag{2.1.4}$$

Из последних фактов следует, что существенный спектр оператора $\mathcal{A}_\mu(k)$ не зависит от μ и имеет место равенство

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu(k)) = [m(k), M(k)].$$

С целью изучения собственных значений оператора $\mathcal{A}_\mu(k)$, при каждом фиксированном $k \in \mathbb{T}^3$ определим регулярную функцию

$$I(k;z) := \int_{\mathbb{T}^3} \frac{dt}{w_1(k,t) - z}$$

в области $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu(k))$.

Следует отметить, что функция

$$\Delta_\mu(k;z) := w_0(k) - z - \mu^2 I(k;z), \; z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu(k))$$

обычно называется детерминантом Фредгольма, ассоциированным с оператором $\mathcal{A}_\mu(k)$.

Установим связь между собственными значениями оператора $\mathcal{A}_\mu(k)$ и нулями функции $\Delta_\mu(k;\cdot)$.

Лемма 2.1.2. *При каждом $\mu > 0$ и $k \in \mathbb{T}^3$ число $z_\mu(k) \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu(k))$ является собственным значением оператора $\mathcal{A}_\mu(k)$ тогда и только тогда, когда $\Delta_\mu(k;z_\mu(k)) = 0.$*

Доказательство. Пусть $z_\mu(k) \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu(k))$ – собственное значение оператора $\mathcal{A}_\mu(k)$ и $f = (f_0, f_1) \in \hat{H}$ – соответствующая собственная вектор-функция. Тогда вектор-функция $f = (f_0, f_1) \in \hat{H}$ удовлетворяет уравнению $\mathcal{A}_\mu(k) f = z_\mu(k) f$, т.е. f_0 и f_1 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} (w_0(k)-z_\mu(k))\,f_0+\mu\int\limits_{\mathbb{T}^3} f_1(t)dt=0, \\ \mu f_0+(w_1(k,p)-z_\mu(k))\,f_1(p)=0. \end{cases} \qquad (2.1.5)$$

Так как $z_\mu(k)\in\mathbb{C}\setminus\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu(k))$, для всех $p\in\mathbb{T}^3$ верно $w_1(k,p)-z_\mu(k)\neq 0.$ Из второго уравнения системы (2.1.5) находим f_1 в виде

$$f_1(p)=-\frac{\mu f_0}{w_1(k,p)-z_\mu(k)}. \qquad (2.1.6)$$

Подставляя выражение (2.1.6) для f_1 в первое уравнение системы (2.1.5) получим

$$\left(w_0(k)-z_\mu(k)-\mu^2\int\limits_{\mathbb{T}^3}\frac{dt}{w_1(k,t)-z_\mu(k)}\right)\cdot f_0=0 \quad \text{или} \quad \Delta_\mu(k;z_\mu(k))=0.$$

Если $f_0=0$, то в силу (2.1.6) имеем, $f_1=0.$ Это противоречит тому, что $f=(f_0,f_1)-$ненулевая вектор-функция. Таким образом, $\Delta_\mu(k;z_\mu(k))=0.$

Пусть теперь для некоторого $z_\mu(k)\in\mathbb{C}\setminus\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu(k))$ верно равенство $\Delta_\mu(k;z_\mu(k))=0.$ Тогда можно показать, что при каждом $\mu>0$ и $k\in\mathbb{T}^3$ вектор-функция $f=(f_0,f_1)\in\hat{H},$ где $f_0\neq 0$ и f_1 определен по формуле (2.1.6), есть собственная вектор-функция оператора $\mathcal{A}_\mu(k)$, соответствующая собственному значению $z_\mu(k)\in\mathbb{C}\setminus\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu(k)).$ Лемма 2.1.2 доказана.

Из леммы 2.1.2 следует, что

$$\sigma_{disc}(\mathcal{A}_\mu(k))=\left\{z\in\mathbb{C}\setminus\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu(k)):\Delta_\mu(k;z)=0\right\}, \qquad k\in\mathbb{T}^3.$$

В конце этого параграфа приведем некоторые важные факты о множествах $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu(k))$ и $\sigma_{disc}(\mathcal{A}_\mu(k))$.

Простые вычисления показывают, что функция $w_1(\cdot,\cdot)$ имеет единственный невырожденный минимум в точке $(\bar{0},\bar{0})\in(\mathbb{T}^3)^2$ и невырожденный максимум в точке $(\bar{\pi},\bar{\pi})\in(\mathbb{T}^3)^2$.

Более того,

$$\min_{k,p\in\mathbb{T}^3} w_1(k,p)=w_1(\bar{0},\bar{0})=0, \qquad \max_{k,p\in\mathbb{T}^3} w_1(k,p)=w_1(\bar{\pi},\bar{\pi})=18.$$

Из определения функции $w_0(\cdot)$ видно, что она также имеет единственный невырожденный минимум в точке $\bar{0}\in\mathbb{T}^3$ и невырожденный максимум в точке $\bar{\pi}\in\mathbb{T}^3$.

Очевидно, что

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu(\bar{0}))=[0;9\frac{3}{8}];$$

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi}))=[8\frac{5}{8};18];$$

$$\sigma_{disc}(\mathcal{A}_\mu(\bar{0}))=\{z\in\mathbb{C}\setminus[0;9\frac{3}{8}]:\Delta_\mu(\bar{0};z)=\gamma-z-\mu^2 I(\bar{0};z)=0\};$$

$$\sigma_{disc}(\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi}))=\{z\in\mathbb{C}\setminus[8\frac{5}{8};18]:\Delta_\mu(\bar{\pi};z)=6+\gamma-z-\mu^2 I(\bar{\pi};z)=0\}.$$

Следовательно,

$$\min_{k\in\mathbb{T}^3}\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu(k))=0, \qquad \max_{k\in\mathbb{T}^3}\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu(k))=18.$$

§2.2. Виртуальные уровни семейства обобщенных моделей Фридрихса

С помощью экстремальных свойств фукции $w_1(\cdot,\cdot)$, а также теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега получим, что существует положительный предел

$$\lim_{z\to-0}\int_{\mathbb{T}^3}\frac{dt}{w_1(\bar{0},t)-z}=\int_{\mathbb{T}^3}\frac{dt}{w_1(\bar{0},t)}.$$

Покажем конечность интеграла

$$\int_{\mathbb{T}^3}\frac{dt}{w_1(\bar{0},t)}.$$

Для $\delta>0$ положим

$$U_\delta(\bar{0}):=\{p\in\mathbb{T}^3:|p|<\delta\}.$$

Поскольку функция $w_1(\bar{0},\cdot)$ имеет единственный невырожденный минимум в точке $\bar{0}\in\mathbb{T}^3$, существуют положительные числа δ, C_1, C_2 для которых

$$C_1|t|^2 \le w_1(\bar{0},t) \le C_2|t|^2, \quad t\in U_\delta(\bar{0}). \qquad (2.2.1)$$

Из аддитивности интеграла следует, что

$$\int_{\mathbb{T}^3}\frac{dt}{w_1(\bar{0},t)} = \int_{\mathbb{T}^3\setminus U_\delta(\bar{0})}\frac{dt}{w_1(\bar{0},t)} + \int_{U_\delta(\bar{0})}\frac{dt}{w_1(\bar{0},t)}. \qquad (2.2.2)$$

Поскольку подинтегральное выражение первого слагаемого правой части равенства (2.2.2)−непрерывная функция в компактном множестве $\mathbb{T}^3\setminus U_\delta(\bar{0})$, то первый интеграл правой части равенства (2.2.2) конечен. Применяя оценку (2.2.1) мы получим

$$\int_{U_\delta(\bar{0})}\frac{dt}{w_1(\bar{0},t)} \le \frac{1}{C_1}\int_{U_\delta(\bar{0})}\frac{dt}{|t|^2}.$$

Переходя к сферической системе координат

$$t_1 = r\sin\psi\cos\varphi,$$
$$t_2 = r\sin\psi\sin\varphi,$$
$$t_3 = r\cos\psi, \quad 0\le r\le\delta, \quad 0\le\varphi\le 2\pi, \quad 0\le\psi\le\pi,$$

получим

$$\int_{U_\delta(\bar{0})}\frac{dt}{|t|^2} = 4\pi\delta < \infty.$$

Введем обозначения:

$$\hat{\mu}_l^0(\gamma) := \sqrt{\gamma}(I(\bar{0};0))^{-1/2} \quad \text{для } \gamma>0;$$
$$\hat{\mu}_r^0(\gamma) := \sqrt{12-\gamma}(I(\bar{0};0))^{-1/2} \quad \text{для } \gamma<12.$$

Замечание 2.2.1. *В силу определения чисел* $\hat{\mu}_l^0(\gamma)$ *и* $\hat{\mu}_r^0(\gamma)$ *имеем*

1) $\hat{\mu}_l^0(\gamma) < \hat{\mu}_r^0(\gamma)$, если $\gamma\in(0;6)$;

2) $\hat{\mu}_0 := \hat{\mu}_l^0(\gamma) = \hat{\mu}_r^0(\gamma)$, если $\gamma=6$;

3) $\hat{\mu}_l^0(\gamma) > \hat{\mu}_r^0(\gamma)$, если $\gamma\in(6;12)$.

Через $C(\mathbb{T}^3)$ и $L_1(\mathbb{T}^3)$ обозначим банаховы пространства непрерывных и интегрируемых функций, определенных на $\mathbb{T}^3$, соответственно.

Определение 2.2.1. *Пусть* $\gamma \neq 0$. *Говорят, что оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ *имеет виртуальный уровень в точке* $z=0$ (*или резонанс с нулевой энергией*), *если число* $\lambda=1$ *является собственным значением интегрального оператора*

$$(G_\mu \psi)(q) = \frac{\mu^2}{\gamma} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\psi(t)dt}{\varepsilon\left(\frac{t}{2}\right) + \varepsilon(t)}, \quad \psi \in C(\mathbb{T}^3).$$

Определение 2.2.2. *Пусть* $\gamma \neq 12$. *Говорят, что оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$ *имеет виртуальный уровень в точке* $z=18$, *если число* $\lambda=1$ *является собственным значением интегрального оператора*

$$(G'_\mu \varphi)(q) = \frac{\mu^2}{\gamma-12} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi(t)dt}{\varepsilon\left(\frac{\bar{\pi}+t}{2}\right) + \varepsilon(t) - 12}, \quad \varphi \in C(\mathbb{T}^3).$$

Замечание 2.2.2. *Число* $\lambda=1$ *является собственным значением оператора* G_μ (*соответственно* G'_μ) *тогда и только тогда, когда* $\mu=\hat{\mu}_l^0(\gamma)$ (*соответственно* $\mu=\hat{\mu}_r^0(\gamma)$). *Следовательно, оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ (*соответственно* $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$) *имеет виртуальный уровень в точке* $z=0$ (*соответственно* $z=18$) *тогда и только тогда, когда* $\mu=\hat{\mu}_l^0(\gamma)$ (*соответственно* $\mu=\hat{\mu}_r^0(\gamma)$).

Заметим, что в определении 2.2.1 требование наличия собственного значения $\lambda=1$ оператора G_μ соответствует существованию решения уравнения $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})f=\theta$, при этом решение $f=(f_0, f_1)$ этого уравнения не принадлежит пространству $\hat{H}$. Иными словами, если оператор $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ имеет виртуальный уровень в точке $z=0$, то вектор-функция $f=(f_0, f_1)$, где

$$f_0 = const \neq 0, \quad f_1(p) = -\frac{\mu f_0}{\varepsilon(p/2) + \varepsilon(p)},$$

удовлетворяет уравнению $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})f = \theta$ и $f_1 \in L_1(\mathbb{T}^3) \setminus L_2(\mathbb{T}^3)$.

В самом деле, конечность интеграла

$$\int_{\mathbb{T}^3} |f_1(t)|\,dt = \mu |f_0| \int_{\mathbb{T}^3} \frac{dt}{w_1(\bar{0},t)}$$

показана выше. Отсюда следует, что $f_1 \in L_1(\mathbb{T}^3)$. Используя двухстроннюю оценку (2.2.1) заключаем, что,

$$\int_{\mathbb{T}^3} |f_1(t)|^2\,dt \geq \frac{\mu^2 |f_0|^2}{C_2^2} \int_{U_\delta(\bar{0})} \frac{dt}{|t|^4} = \infty,$$

Следовательно, $f_1 \notin L_2(\mathbb{T}^3)$. Это означает, что $f_1 \in L_1(\mathbb{T}^3) \setminus L_2(\mathbb{T}^3)$.

Аналогично, если оператор $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$ имеет виртуальный уровень в точке $z = 18$, то вектор-функция $f = (f_0, f_1)$, где

$$f_0 = const \neq 0, \qquad f_1(p) = -\frac{\mu f_0}{\varepsilon((\bar{\pi} + p)/2) + \varepsilon(p) - 12}$$

удовлетворяет уравнению $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})f = 18f$ и $f_1 \in L_1(\mathbb{T}^3) \setminus L_2(\mathbb{T}^3)$.

Следующая теорема описывает условия существования отрицательного собственного значения и виртуального уровня для $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$.

Теорема 2.2.1. 1) *Если* $\gamma \leq 0$, *то для любого* $\mu > 0$ *оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ *имеет единственное отрицательное собственное значение.*

2) *Если* $\gamma > 0$, *справедливы следующие утверждения*:

2.1) *для любого* $\mu \in (0; \hat{\mu}_l^0(\gamma))$ *оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ *не имеет отрицательных собственных значений*;

2.2) *если* $\mu = \hat{\mu}_l^0(\gamma)$ *оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ *имеет виртуальный уровень в точке* $z = 0$;

2.3) *для любого* $\mu > \hat{\mu}_l^0(\gamma)$ *оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ *имеет единственное отрицательное собственное значение.*

Доказательство. 1) Пусть $\gamma \le 0$. Тогда для любого $\mu > 0$ верно следующее соотношение

$$\Delta_\mu(\bar{0};0) = \gamma - \mu^2 \int_{\mathbb{T}^3} \frac{dt}{w_1(\bar{0},t)} \le -\mu^2 \int_{\mathbb{T}^3} \frac{dt}{w_1(\bar{0},t)} < 0,$$

отсюда, $\Delta_\mu(\bar{0};0) < 0$.

Легко видеть, что

$$\lim_{z\to-\infty} \Delta_\mu(\bar{0},z) = \lim_{z\to-\infty}\left(\gamma - z - \mu^2 \int_{\mathbb{T}^3} \frac{dt}{w_1(\bar{0},t) - z}\right) = +\infty.$$

Поскольку функция $\Delta_\mu(\bar{0};\cdot)$ непрерывна и монотонна убывает на полуоси $(-\infty,0)$, то существует единственная точка $z_0(\mu) \in (-\infty;0)$ такая, что $\Delta_\mu(\bar{0};z_0(\mu)) = 0$.

В силу леммы 2.1.2 число $z_0(\mu)$ является собственным значением оператора $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$.

2) Пусть теперь $\gamma > 0$.

Предположим, что $\mu \in (0;\hat{\mu}_l^0(\gamma))$. Поскольку функция $\Delta_\mu(\bar{0};\cdot)$ монотонна убывает на полуоси $(-\infty;0)$, то для всех отрицательных z имеем $\Delta_\mu(\bar{0};z) > \Delta_\mu(\bar{0};0)$ и

$$\Delta_\mu(\bar{0};0) = \gamma - \mu^2 \int_{\mathbb{T}^3} \frac{dt}{w_1(\bar{0},t)} > \gamma - (\mu_l^0(\gamma))^2 \int_{\mathbb{T}^3} \frac{dt}{w_1(\bar{0},t)} = 0.$$

Следовательно, $\Delta_\mu(\bar{0};z) > 0$ для всех $z \in (-\infty;0)$, то есть, функция $\Delta_\mu(\bar{0};\cdot)$ не имеет нулей на полуоси $(-\infty;0)$. Тогда в силу леммы 2.1.2 оператор $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ не имеет отрицательных собственных значений.

Рассмотрим случай $\mu = \hat{\mu}_l^0(\gamma)$. Покажем, что оператор $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ имеет виртуальный уровень в точке $z = 0$. По определению 2.2.1 уравнение

$$\psi(q) = \frac{\mu^2}{\gamma} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\psi(t)dt}{\varepsilon(t/2) + \varepsilon(t)}$$

имеет нетривиальное решение $\psi \in C(\mathbb{T}^3)$. Это решение равно функции $\psi(q) \equiv 1$ (с точностью до константы) и следовательно,

$$\Delta_\mu(\bar{0};0) = \gamma - \mu^2 \int_{\mathbb{T}^3} \frac{dt}{\varepsilon(t/2) + \varepsilon(t)} = 0,$$

то есть $\mu = \hat{\mu}_l^0(\gamma)$

Допустим $\mu > \hat{\mu}_l^0(\gamma)$. Тогда

$$\Delta_\mu(\bar{0};0) = \gamma - \mu^2 \int_{\mathbb{T}^3} \frac{dt}{w_1(\bar{0},t)} < \gamma - (\mu_l^0(\gamma))^2 \int_{\mathbb{T}^3} \frac{dt}{w_1(\bar{0},t)} = 0,$$

то есть $\Delta_\mu(\bar{0};0) < 0$. В этом случае из соотношения

$$\lim_{z \to -\infty} \Delta_\mu(\bar{0};z) = +\infty$$

следует, что существует число $z_0(\mu) \in (-\infty;0)$ такое, что $\Delta_\mu(\bar{0};z_0(\mu)) = 0.$

Далее, из леммы 2.1.2 вытекает, что число $z_0(\mu)$ есть собственное значение оператора $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$.

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 2.2.1.

Теорема 2.2.2. 1) *Если* $\gamma \geq 12$, *то для любого* $\mu > 0$ *оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$ *имеет единственное собственное значение, лежащее в* $(18;+\infty)$.

2) *Если* $\gamma < 12$, *справедливы следующие утверждения*:

2.1) *для любого* $\mu \in (0;\hat{\mu}_r^0(\gamma))$ *оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$ *не имеет собственных значений, больших* 18*;*

2.2) *если* $\mu = \hat{\mu}_r^0(\gamma)$, *то оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$ *имеет виртуальный уровень в точке* $z = 18$*;*

2.3) *для любого* $\mu > \hat{\mu}_r^0(\gamma)$ *оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$ *имеет единственное собственное значение, лежащее в* $(18;+\infty)$.

Так как $\hat{\mu}_l^0(6)=\hat{\mu}_r^0(6)$, полагая $\hat{\mu}_0:=\hat{\mu}_l^0(6)$, из теорем 2.2.1 и 2.2.2 получим

Следствие 2.2.1. 1) *Если* $\gamma\in(0;6)$, *то для* $\mu=\hat{\mu}_l^0(\gamma)$ *оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ *имеет виртуальный уровень в точке* $z=0$ *и оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$ *не имеет собственных значений, больших* 18;

2) *если* $\gamma=6$, *то для* $\mu=\hat{\mu}_0$ *операторы* $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ *и* $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$ *имеют виртуальные уровни в точках* $z=0$ *и* $z=18$, *соответственно;*

3) *если* $\gamma\in(6;12)$, *то для* $\mu=\hat{\mu}_r^0(\gamma)$ *оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ *имеет единственное отрицательное собственное значение и оператор* $\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi})$ *имеет виртуальный уровень в точке* 18.

Лемма 2.2.1. *Для любого* $k\in\mathbb{T}^3$ *оператор* $\mathcal{A}_{\hat{\mu}_0}(k)$ *не имеет собственных значений в* $(-\infty;0)\cup(18;+\infty)$.

Доказательство. Простые вычисления показывают, что $\Delta_{\hat{\mu}_0}(\bar{0};0)=\Delta_{\hat{\mu}_0}(\bar{\pi};18)=0.$ Из равенства $I(k;0)=-I(k+\bar{\pi};18),\quad k\in\mathbb{T}^3$ следует, что

$$\Delta_\mu(\bar{0};0)=-\Delta_{\hat{\mu}_0}(\bar{\pi};18)=6-\mu^2 I(\bar{0};0)=0,$$

и следовательно, последнее равенство верно тогда и только тогда, когда $\mu=\hat{\mu}_0$.

Сначала докажем, что $I(k;0)<I(\bar{0};0),\quad k\in\mathbb{T}^3\setminus\{\bar{0}\}$. Используя определение функции $w_1(\cdot,\cdot)$ легко показать, что

$$w_1(\bar{0},p)-\frac{w_1(k,p)+w_1(-k,p)}{2}=\sum_{i=1}^{3}(\cos k_i-1)+\sum_{i=1}^{3}\cos\frac{p_i}{2}(\cos\frac{k_i}{2}-1). \qquad (2.2.3)$$

Так как функция $w_1(\cdot,\cdot)-$четная, функция $I(\cdot;0)$ также четная и следовательно (см. [7]),

$$I(k;0)-I(\bar{0};0)=-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{T}^3}\frac{(w_1(k,t)-w_1(-k,t))^2}{w_1(k,t)w_1(-k,t)w_1(\bar{0},t)}dt$$

$$+\int_{\mathbb{T}^3}\left(w_1(\bar{0},t)-\frac{w_1(k,t)+w_1(-k,t)}{2}\right)$$

$$\times\left(\frac{1}{w_1(k,t)w_1(\overline{0},t)}+\frac{1}{w_1(-k,t)w_1(\overline{0},t)}\right)dt \qquad (2.2.4)$$

В силу равенств (2.2.3) и (2.2.4) для любых ненулевых $k\in\mathbb{T}^3$ справедливо неравенство $I(k;0)<I(\overline{0};0)$. Учитывая последнее неравенство и равенство $I(k;0)=-I(k+\overline{\pi};18),\quad k\in\mathbb{T}^3$ получим $I(k;18)>I(\overline{\pi};18),\quad k\neq\overline{\pi}.$ Используя эти неравенства и учитывая, что функция $w_0(\cdot)$ имеет единственный невырожденный минимум в точке $\overline{0}\in\mathbb{T}^3$ и невырожденный максимум в точке $\overline{\pi}\in\mathbb{T}^3$, получаем, что для любого $\mu>0$ функция $\Delta_\mu(\cdot;0)$ (соответственно $\Delta_\mu(\cdot;18)$) имеет единственный невырожденный минимум (соответственно максимум) в точке $\overline{0}\in\mathbb{T}^3$ (соответственно $\overline{\pi}\in\mathbb{T}^3$).

Так как $\Delta_\mu(k;\cdot)-$неубывающая функция на $(-\infty;0]\cup[18;+\infty)$ верны следующие соотношения

$$\Delta_{\hat{\mu}_0}(k;z)>\Delta_{\hat{\mu}_0}(k;0)\geq\Delta_{\hat{\mu}_0}(\overline{0};0)=0,\quad z\in(-\infty;0);$$
$$\Delta_{\hat{\mu}_0}(k;z)<\Delta_{\hat{\mu}_0}(k;18)\leq\Delta_{\hat{\mu}_0}(\overline{\pi};18)=0,\quad z\in(18;\infty).$$

Следовательно, $\Delta_{\hat{\mu}_0}(k;z)>0$ для любого $z\in(-\infty;0)$ и аналогично, $\Delta_{\hat{\mu}_0}(k;z)<0$ для любого $z\in(18;+\infty)$. Это означает то, что функция $\Delta_{\hat{\mu}_0}(k;\cdot)$ не имеет нулей в $(-\infty;0)\cup(18;+\infty)$. По лемме 2.1.2 оператор $\mathcal{A}_{\hat{\mu}_0}(k),\ k\in\mathbb{T}^3$, не имеет собственных значений в $(-\infty;0)\cup(18;+\infty)$.

Следующее разложение играет важную роль при доказательстве существования бесконечного числа собственных значений соответствующей $2\times2-$операторной матрицы.

Лемма 2.2.2. *Имеет место разложение:*

$$\Delta_{\hat{\mu}_l^0(\gamma)}(k;z)=\frac{32\pi^2(\hat{\mu}_l^0(\gamma))^2}{5\sqrt{5}}\sqrt{\frac{6}{5}|k|^2-2z}+O(|k|^2)+O(|z|),\ |k|\to0,\ z\nearrow0;$$

$$(2.2.5)$$

$$\Delta_{\hat{\mu}_r^0(\gamma)}(k;z)=-\frac{32\pi^2(\hat{\mu}_r^0(\gamma))^2}{5\sqrt{5}}\sqrt{\frac{6}{5}|k-\overline{\pi}|^2+2(18-z)}+O(|k-\overline{\pi}|^2)+O(|z-18|),$$

$$\left|k-\bar{\pi}\right|\to 0, \quad z\searrow 18.$$

(2.2.6)

Доказательство. Из определения функции $w_0(\cdot)$ следует, что

$$w_0(k)=6+\gamma+O(|k-\bar{\pi}|^2), \quad |k-\bar{\pi}|\to 0. \tag{2.2.7}$$

Берем достаточно малое $\delta>0$. Используя аддитивность интеграла, перепишем функцию $\Delta_{\hat{\mu}_r^0(\gamma)}(k\,;z)$ в виде

$$\Delta_{\hat{\mu}_r^0(\gamma)}(k\,;z)=w_0(k)-z-(\hat{\mu}_r^0(\gamma))^2\int\limits_{U_\delta(\bar{\pi})}\frac{dt}{w_1(k,t)-z}-$$

$$-(\hat{\mu}_r^0(\gamma))^2\int\limits_{\mathbb{T}^3\backslash U_\delta(\bar{\pi})}\frac{dt}{w_1(k,t)-z}. \tag{2.2.8}$$

Поскольку функция $w_1(\cdot,\cdot)$ имеет единственный невырожденный максимум в точке $(\bar{\pi},\bar{\pi})\in(\mathbb{T}^3)^2$, следуя схеме работы [19] имеем

$$\int\limits_{U_\delta(\bar{\pi})}\frac{dt}{w_1(k,t)-z}=\int\limits_{U_\delta(\bar{\pi})}\frac{dt}{w_1(\bar{\pi},t)-z}+\frac{32\pi^2(\hat{\mu}_r^0(\gamma))^2}{5\sqrt{5}}\sqrt{\frac{6}{5}|k-\bar{\pi}|^2+2(18-z)}+$$

$$+O(|k-\bar{\pi}|^2)+O\big(|z-18|\big), \quad |k-\bar{\pi}|\to 0, \quad z\searrow 18 \tag{2.2.9}$$

и

$$\int\limits_{\mathbb{T}^3\backslash U_\delta(\bar{\pi})}\frac{dt}{w_1(k,t)-z}=\int\limits_{\mathbb{T}^3\backslash U_\delta(\bar{\pi})}\frac{dt}{w_1(\bar{\pi},t)-z}+O(|k-\bar{\pi}|^2)+O(|z-18|),$$

$$|k-\bar{\pi}|\to 0,\ z\searrow 18.$$

(2.2.10)

Подставляя выражения (2.2.7), (2.2.9) и (2.2.10) в равенство (2.2.8) и используя равенства $\Delta_{\hat{\mu}_r^0(\gamma)}(\bar{\pi};18)=0$ мы получаем (2.2.6). Разложение (2.2.5) можно получить аналогично.

§2.3. Числовая область значений семейства обобщенных моделей Фридрихса

В работе [42] изучена числовая область значений обобщенной модели Фридрихса на трехмерном торе, когда существуют ровно два собственных значения. В этом параграфе даётся полное описание структуры замыкания числовой области значений обобщенной модели Фридрихса в терминах матричных элементов при всех размерностях тора.

Чтобы получить более наглядные результаты, в гильбертовом пространстве $\hat{H} := \mathbb{C} \oplus L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ рассмотрим $2\times 2-$ операторную матрицу $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ вида

$$\hat{\mathcal{A}}_\mu = \begin{pmatrix} A_{00} & \mu A_{01} \\ \mu A_{01}^* & A_{11} \end{pmatrix}, \qquad (2.3.1)$$

и выберем матричные элементы $A_{ij} : H_j \to H_i, \quad i \le j, \quad i, j = 0,1$ следующим образом:

$$A_{00} f_0 = w f_0, \quad A_{01} f_1 = \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(s) f_1(s) ds, \quad (A_{11} f_1)(p) = u(p) f_1(p).$$

Здесь $f_i \in H_i, \quad i = 0,1; \quad w, \mu \in \mathbb{R}, \quad \mu > 0$ и $u(\cdot), \quad v(\cdot) -$вещественно-аналитические функции на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$.

Следует отметить, что если положим $v(t) \equiv 1$ и $\mathrm{d} = 3$, то при каждом фиксированном $k_0 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ оператор $\mathcal{A}_\mu(k_0)$, изученный в параграфах 2.1-2.2, имеет форму (2.3.1).

Известно, что в конечномерном случае числовая область значений линейного ограниченного оператора есть компактное множество, т.е. замкнута и ограничена. В бесконечномерном пространстве числовая область значений не всегда замкнута. В данном параграфе выделены случаи когда числовая область значений обобщенной модели Фридрихса $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ замкнута.

Так как оператор $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ является линейным ограниченным оператором, его спектр содержится в замыкании множества $W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)$.

Далее, в этом параграфе установим связь между пороговыми собственными значениями и числовой областью значений, точнее найдем необходимые условия для того, чтобы спектр оператора $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ совпадал с множеством $W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)$.

Существенный и дискретный спектры оператора $\mathcal{A}_\mu(k)$ подробно изложены относительно $\mu > 0$ и $k \in \mathbb{T}^3$ в параграфе 2.1. Поэтому во избежание повторения мы приводим без доказательств аналогичные факты для $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ с соответствующим изменением.

Пусть

$$m = \min_{p \in \mathbb{T}^d} u(p), \qquad M = \max_{p \in \mathbb{T}^d} u(p).$$

Тогда

$$\sigma_{ess}(\hat{\mathcal{A}}_\mu) = [m; M]. \tag{2.3.2}$$

Определим регулярную в $\mathbb{C} \setminus [m; M]$ функцию (детерминант Фредгольма, ассоциированный с оператором $\hat{\mathcal{A}}_\mu$)

$$\hat{\Delta}_\mu(w; z) = w - z - \mu^2 \int_{\mathbb{T}^d} \frac{v^2(s)ds}{u(s) - z}.$$

Следующая лемма устанавливает связь между собственными значениями оператора $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ и нулями функции $\hat{\Delta}_\mu(w; \cdot)$.

Лемма 2.3.1. *Оператор $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ имеет собственное значение $z \in \mathbb{C} \setminus [m; M]$ тогда и только тогда, когда $\hat{\Delta}_\mu(w; z) = 0$.*

Из леммы 2.3.1 вытекает, что

$$\sigma_{disc}(\hat{\mathcal{A}}_\mu) = \{z \in \mathbb{C} \setminus [m; M] : \hat{\Delta}_\mu(w; z) = 0\}.$$

Надо отметить, что дискретный спектр оператора $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ играет важную роль при исследовании его числовой области значений.

Лемма 2.3.2. *Оператор* $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ *может иметь не более чем по одному простому собственному значению, лежащих левее* m *и правее* M.

Доказательство леммы 2.3.2 вытекает из свойства монотонности и непрерывности функции $\hat{\Delta}_\mu(w;\cdot)$ на полуосях $(-\infty;m)$ и $(M;+\infty)$, а также леммы 2.3.1.

Далее в случае существования собственных значений оператора $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ обозначим их через $\lambda_k(w,\mu)$, $k=1,2.$ Для определённости предположим, что $\lambda_1(w,\mu)<m$ и $\lambda_2(w,\mu)>M$.

Пусть $N_1, N_2 \in \mathbb{N}-$фиксированные числа. На протяжении этого параграфа будем предполагать, что функция $u(\cdot)$ имеет невырожденный минимум в точках $p_i \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, $i=\overline{1,N_1}$, и невырожденный максимум в точках $q_j \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, $j=\overline{1,N_2}$.

В качестве такой функции $u(\cdot)$ можно взять

$$u(p)=\sum_{k=1}^{\mathrm{d}}(1-\cos(np^{(k)})),\ p=(p^{(1)},\ldots,p^{(\mathrm{d})})\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Обозначим через $N_1 \equiv N_1(n)$ и $N_2 \equiv N_2(n)$ число точек

$$p_i=(p_i^{(1)},\ldots,p_i^{(\mathrm{d})})\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}} \text{ и } q_j=(q_j^{(1)},\ldots,q_j^{(\mathrm{d})})\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}},$$

соответственно, для которых

$$p_i^{(k)}\in\left\{0;\pm\frac{2}{n}\pi;\pm\frac{4}{n}\pi;\ldots;\pm\frac{n_1}{n}\pi\right\}\cup\begin{cases}\{\pi\}, & \text{если } n-\text{чётное}\\ \varnothing, & \text{если } n-\text{нечётное}\end{cases},\ k=\overline{1,\mathrm{d}};$$

$$q_j^{(k)}\in\left\{\pm\frac{1}{n}\pi;\pm\frac{3}{n}\pi;\ldots;\pm\frac{n_2}{n}\pi\right\}\cup\begin{cases}\varnothing, & \text{если } n-\text{чётное}\\ \{\pi\}, & \text{если } n-\text{нечётное}\end{cases},\ k=\overline{1,\mathrm{d}};$$

причём $p_i \neq p_j$, $q_i \neq q_j$ при $i \neq j$; здесь

$$n_1:=\begin{cases}n-2, & \text{если } n-\text{чётное}\\ n-1, & \text{если } n-\text{нечётное}\end{cases};\quad n_2:=\begin{cases}n-1, & \text{если } n-\text{чётное}\\ n-2, & \text{если } n-\text{нечётное}\end{cases}.$$

Очевидно, что определённая так функция $u(\cdot)$ имеет невырожденный минимум в точках $p_i \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, невырожденный максимум в точках $q_j \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, причём $N_1 = n,\quad N_2 = n-1$. Таким образом, множество значений функции $u(\cdot)$ совпадает с отрезком $[0, 2\mathrm{d}]$.

I. Случай $d \geq 3$. В дальнейшем через δ, C_1, C_2 и C_3 обозначаются различные положительные постоянные, значения которых не конкретизированы.

Так как функция $u(\cdot)$ имеет невырожденный минимум в точках $p_i \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, $i = \overline{1, N_1}$, существуют числа $C_1, C_2, C_3 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$C_1 | p - p_i |^2 \leq u(p) - m \leq C_2 | p - p_i |^2, \quad p \in U_\delta(p_i), \quad i = \overline{1, N_1}; \qquad (2.3.3)$$

$$u(p) - m \geq C_3, \quad p \in \mathbb{T}_\delta \equiv \mathbb{T}^{\mathrm{d}} \setminus \bigcup_{i=1}^{N_1} U_\delta(p_i). \qquad (2.3.4)$$

Имеет место равенство

$$\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(s)ds}{u(s)-m} = \sum_{i=1}^{N_1} \int_{U_\delta(p_i)} \frac{v^2(s)ds}{u(s)-m} + \int_{\mathbb{T}_\delta} \frac{v^2(s)ds}{u(s)-m}. \qquad (2.3.5)$$

Учитывая неравенства (2.3.3) и непрерывность функции $v(\cdot)$ на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, имеем, что i-тое ($i \in \{1, \ldots, N_1\}$) слагаемое в правой части (2.3.5) оценивается следующим образом:

$$\int_{U_\delta(p_i)} \frac{v^2(s)ds}{u(s)-m} \leq C_1 \int_{U_\delta(\bar{0})} \frac{ds}{|s|^2} \leq C_1 (2\pi)^{\mathrm{d}-3} \int_{\{p \in \mathbb{T}^3 : |p| < \delta\}} \frac{ds^{(1)} ds^{(2)} ds^{(3)}}{|s^{(1)}|^2 + |s^{(2)}|^2 + |s^{(3)}|^2}.$$

Переходя к сферической системе координат, убедимся, что последний интеграл конечен. Конечность последнего слагаемого в правой части (2.3.5), т.е. интеграла по $\mathbb{T}_\delta$, вытекает из непрерывности функции $v(\cdot)$ на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ и неравенства (2.3.4). Аналогично показывается, что

$$\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(s)ds}{M - u(s)} \qquad (2.3.6)$$

также конечен.

Положим

$$\mu_l := \left(\int_{\mathbb{T}^d} \frac{v^2(s)ds}{u(s)-m} \right)^{-1/2}, \qquad \mu_r := \left(\int_{\mathbb{T}^d} \frac{v^2(s)ds}{M-u(s)} \right)^{-1/2}.$$

Следующая теорема описывает структуру числовой области значений оператора $\hat{\mathcal{A}}_\mu$.

Теорема 2.3.1. *Пусть* $w \le m.$

1) *Если* $0 < \mu \le \mu_r \sqrt{M-w},$ *то верно равенство* $\overline{W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)} = [\lambda_1(w,\mu); M];$

2) *При* $\mu > \mu_r \sqrt{M-w}$ *имеет место равенство* $W(\hat{\mathcal{A}}_\mu) = [\lambda_1(w,\mu); \lambda_2(w,\mu)].$

Доказательство. Пусть $w \le m.$ Тогда при всех $\mu > 0$ верно неравенство $\hat{\Delta}_\mu(w;m) < 0.$ Так как $\lim\limits_{z\to-\infty} \hat{\Delta}_\mu(w;z) = +\infty$ и функция $\hat{\Delta}_\mu(w;\cdot)$ непрерывна и монотонно убывает на полуоси $(-\infty;m),$ функция $\hat{\Delta}_\mu(w;\cdot)$ имеет единственный простой нуль $\lambda_1(w,\mu)$ в $(-\infty;m).$ В силу леммы 2.3.1 число $\lambda_1(w,\mu)$ является единственным простым собственным значением оператора $\hat{\mathcal{A}}_\mu$.

1) Предположим, что $0 < \mu \le \mu_r \sqrt{M-w}.$ Простые вычисления показывают, что $\hat{\Delta}_\mu(w;M) < 0.$ Теперь из факта $\lim\limits_{z\to+\infty} \hat{\Delta}_\mu(w;z) = -\infty,$ а также из непрерывности и монотонности функции $\hat{\Delta}_\mu(w;\cdot)$ на полуоси $(M;+\infty)$, вытекает, что функция $\hat{\Delta}_\mu(w;\cdot)$ не имеет нулей в $(M;+\infty).$ В силу леммы 2.3.1 оператор $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ не имеет собственных значений, лежащих в $(M;+\infty).$ Следовательно, в этом случае

$$\sigma(\hat{\mathcal{A}}_\mu) = \{\lambda_1(w,\mu)\} \cup [m;M], \quad \lambda_1(w,\mu) < m.$$

Так как замыкание числовой области значений оператора $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ есть выпуклая оболочка спектра $\sigma(\hat{\mathcal{A}}_\mu),$ то $\overline{W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)} = [\lambda_1(w,\mu); M].$ Первое утверждение теоремы 2.3.1 доказано.

2) Пусть теперь $\mu > \mu_r\sqrt{M-w}.$ Рассуждая, как выше, можно показать, что оператор $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ имеет единственное собственное значение $\lambda_2(w,\mu)$, лежащее в $(M;+\infty)$, т.е.

$$\sigma(\hat{\mathcal{A}}_\mu)=\{\lambda_1(w,\mu)\}\cup[m;M]\cup\{\lambda_2(w,\mu)\},\quad \lambda_1(w,\mu)<m,\quad \lambda_2(w,\mu)>M.$$

Видно, что в этом случае

$$m_\mu:=\inf_{\|f\|=1}(\hat{\mathcal{A}}_\mu f,f)=\lambda_1(w,\mu),\quad M_\mu:=\sup_{\|f\|=1}(\hat{\mathcal{A}}_\mu f,f)=\lambda_2(w,\mu). \qquad (2.3.7)$$

Значит $\overline{W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)}=[\lambda_1(w,\mu);\lambda_2(w,\mu)].$ Покажем, что $\lambda_k(w,\mu)\in W(\hat{\mathcal{A}}_\mu),\;\; k=1,2.$ Пусть $g_1\in\hat{H}$ и $g_2\in\hat{H}-$нормированные собственные векторы, соответствующие собственным значениям $\lambda_1(w,\mu)$ и $\lambda_2(w,\mu)$, соответственно. Тогда

$$\min_{\|f\|=1}(\hat{\mathcal{A}}_\mu f,f)=(\hat{\mathcal{A}}_\mu g_1,g_1)=\lambda_1(w,\mu);$$

$$\max_{\|f\|=1}(\hat{\mathcal{A}}_\mu f,f)=(\hat{\mathcal{A}}_\mu g_2,g_2)=\lambda_2(w,\mu).$$

Отсюда следует, что $\lambda_k(w,\mu)\in W(\hat{\mathcal{A}}_\mu),\;\; k=1,2.$ Второе утверждение теоремы 2.3.1 доказано.

Из доказательства теоремы 2.3.1 вытекает следующее замечание.

Замечание 2.3.1. *Пусть* $\hat{H}-$*произвольное гильбертово пространство и* $\hat{\mathcal{A}}_\mu:\hat{H}\to\hat{H}-$*произвольный линейный ограниченный самосопряженный оператор. Тогда* $\overline{W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)}=[m_\mu;M_\mu].$ *Если дополнительно выполняется условие* $\sigma_{ess}(\hat{\mathcal{A}}_\mu)\subset(m_\mu;M_\mu),$ *то* $W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)=[m_\mu;M_\mu].$ *Здесь числа* m_μ и M_μ *определены по формуле* (2.3.7).

Заметим, что в утверждение 1) теоремы 2.3.1 число $M\in\sigma_{ess}(\hat{\mathcal{A}}_\mu)$ является предельной точкой множества $W(\hat{\mathcal{A}}_\mu).$ Действительно, так как $M\in\sigma_{ess}(\hat{\mathcal{A}}_\mu),$ по критерию Вейля (см. теорема 1.1.3) существует ортонормированная система $\{g_n\}\subset\hat{H}$ такая, что

$$\psi_n := \hat{\mathcal{A}}_\mu g_n - Mg_n \to 0,\ n \to \infty.$$

Рассмотрим скалярное произведение (ψ_n, g_n):

$$(\psi_n, g_n) = (\hat{\mathcal{A}}_\mu g_n, g_n) - M(g_n, g_n) = (\hat{\mathcal{A}}_\mu g_n, g_n) - M \to 0,\ n \to \infty.$$

Отсюда следует, что M есть предельная точка множества $W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)$.

Следующие теоремы доказываются аналогично теореме 2.3.1.

Теорема 2.3.2. *Пусть* $m < w < M$.

1) *Если* $\mu > \max\{\mu_l\sqrt{w-m}, \mu_r\sqrt{M-w}\}$, *то* $W(\hat{\mathcal{A}}_\mu) = [\lambda_1(w,\mu); \lambda_2(w,\mu)]$;

2) *Если* $\mu_l\sqrt{w-m} < \mu_r\sqrt{M-w}$ *и* $\mu \in (\mu_l\sqrt{w-m}; \mu_r\sqrt{M-w}]$, *то* $\overline{W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)} = [\lambda_1(w,\mu); M]$;

3) *Если* $\mu_l\sqrt{w-m} > \mu_r\sqrt{M-w}$ *и* $\mu \in (\mu_r\sqrt{M-w}; \mu_l\sqrt{w-m}]$, *то* $\overline{W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)} = [m; \lambda_2(w,\mu)]$;

4) *Если* $\mu < \min\{\mu_l\sqrt{w-m}, \mu_r\sqrt{M-w}\}$, *то* $\overline{W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)} = [m; M]$.

Замечание 2.3.2. *Если* $\mu_l\sqrt{w-m} = \mu_r\sqrt{M-w} = \tilde{\mu}_0$, *т.е. если*

$$w = \frac{m\mu_l^2 + M\mu_r^2}{\mu_l^2 + \mu_r^2},$$

то при $\mu > \tilde{\mu}_0$ имеем случай утверждения 1), а при $0 < \mu \le \tilde{\mu}_0$ случай утверждения 4) теоремы 2.3.2.

Теорема 2.3.3. *Пусть* $w \ge M$.

1) *Если* $0 < \mu \le \mu_l\sqrt{w-m}$, *то имеет место равенство* $\overline{W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)} = [m; \lambda_2(w,\mu)]$;

2) *При* $\mu > \mu_l\sqrt{w-m}$ *верно равенство* $W(\hat{\mathcal{A}}_\mu) = [\lambda_1(w,\mu); \lambda_2(w,\mu)]$.

II. Случай $\mathrm{d} = 1,2$. Предположим, что $v(p_i) \ne 0$ и $v(q_j) \ne 0$ при некотором $i \in \{1, \ldots, N_1\}$ и $j \in \{1, \ldots, N_2\}$, соответственно. Тогда существуют числа $C_1 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$|v(p)| \geq C_1, \quad p \in U_\delta(p_i) \cup U_\delta(q_j). \tag{2.3.8}$$

Учитывая (2.3.3), (2.3.8), имеем

$$\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(s)ds}{u(s)-m} \geq C_1 \int_{U_\delta(\bar{0})} \frac{ds}{|s|^2}.$$

При $\mathrm{d}=1$ расходимость последнего интеграла очевидна, а при $\mathrm{d}=2$, переходя к полярной системе координат, убеждаемся, что последний интеграл расходится. Аналогично доказывается расходимость интеграла (2.3.6) при $\mathrm{d}=1,2.$

Тогда при всех значениях параметров w и μ верно

$$\lim_{z \to m-0} \hat{\Delta}_\mu(w;z) = -\infty \text{ и } \lim_{z \to M+0} \hat{\Delta}_\mu(w;z) = +\infty.$$

Так как

$$\lim_{z \to -\infty} \hat{\Delta}_\mu(w;z) = +\infty \text{ и } \lim_{z \to +\infty} \hat{\Delta}_\mu(w;z) = -\infty$$

и функция $\hat{\Delta}_\mu(w;\cdot)$ непрерывна и монотонно убывает на полуосях $(-\infty;m)$ и $(M;+\infty)$, при всех w и μ оператор $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ имеет два собственных значения, которые мы обозначили через $\lambda_k(w,\mu)$, $k=1,2,$ причём $\lambda_1(w,\mu)<m,$ $\lambda_2(w,\mu)>M.$ В силу замечания 2.3.1 для числовой области значений оператора $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ имеет место равенство

$$W(\hat{\mathcal{A}}_\mu) = [\lambda_1(w,\mu);\lambda_2(w,\mu)].$$

Пусть $v(p_i)=0,$ $i \in \{1,\ldots,N_1\}$ и $v(q_j)=0,$ $j \in \{1,\ldots,N_2\}.$ Тогда существуют числа $C_1,C_2>0,$ $\alpha_i,\beta_j \in \mathbb{N}$ и $\delta>0$ такие, что при всех $\mathrm{d} \in \mathbb{N}$ имеет место

$$C_1 |p-p_i|^{\alpha_i} \leq |v(p)| \leq C_2 |p-p_i|^{\alpha_i}, \quad p \in U_\delta(p_i), \quad i=\overline{1,N_1}; \tag{2.3.9}$$

$$C_1 |p-q_j|^{\beta_j} \leq |v(p)| \leq C_2 |p-q_j|^{\beta_j}, \quad p \in U_\delta(q_j), \quad j=\overline{1,N_2}. \tag{2.3.10}$$

Теперь, применяя (2.3.3), (2.3.4), (2.3.9) и (2.3.10), а также используя непрерывность функции $v(\cdot)$ на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, имеем

$$\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(s)ds}{u(s)-m} = \sum_{i=1}^{N_1} \int_{U_\delta(p_i)} \frac{v^2(s)ds}{u(s)-m} + \int_{\mathbb{T}_\delta} \frac{v^2(s)ds}{u(s)-m} \leq C_1 \sum_{i=1}^{N_1} \int_{U_\delta(0)} |s|^{2\alpha_i-2}\, ds + C_2 < \infty.$$

Далее совершенно аналогично показывается конечность интеграла (2.3.6). Следовательно, числа μ_l и μ_r конечны, в этом случае верны все утверждения теорем 2.3.1–2.3.3.

Осталось рассмотреть случай $v(p_i)\neq 0$ при некотором $i\in\{1,\ldots,N_1\}$ и $v(q_j)=0,\ \ j=\overline{1,N_2}.$ В этом случае при всех w и μ верно $\min\sigma(\hat{\mathcal{A}}_\mu)=\lambda_1(w,\mu).$ Рассуждая, как в теоремах 2.3.1–2.3.3, получим следующие утверждения:

1. пусть $w\geq M$; тогда при всех $\mu>0$ имеет место равенство

$$W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)=[\lambda_1(w,\mu);\lambda_2(w,\mu)].$$

2. пусть $w<M$:

а) если $0<\mu\leq\mu_r\sqrt{M-w},$ то $\overline{W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)}=[\lambda_1(w,\mu);M];$

б) если $\mu>\mu_r\sqrt{M-w},$ то $W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)=[\lambda_1(w,\mu);\lambda_2(w,\mu)].$

Случай, когда $v(p_i)=0,\ \ i=\overline{1,N_1}$ и $v(q_j)\neq 0$ при некотором $j\in\{1,\ldots,N_2\}$ аналогичен.

Заметим, что если $u(p)\equiv u_0=const,$ то при всех значениях $w,\mu\in\mathbb{R},\ \mu>0$ и $\mathrm{d}\in\mathbb{N}$ числа

$$\lambda_1(w,\mu)=\frac{w+u_0-\sqrt{(w-u_0)^2+4\mu^2\|v\|^2}}{2},$$

$$\lambda_2(w,\mu)=\frac{w+u_0+\sqrt{(w-u_0)^2+4\mu^2\|v\|^2}}{2}$$

являются простыми собственными значениями оператора $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ и имеет место равенство $\sigma_{ess}(\hat{\mathcal{A}}_\mu)=\{u_0\},$ причём $\lambda_1(w,\mu)<u_0<\lambda_2(w,\mu).$ Следовательно, в этом случае имеем $W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)=[\lambda_1(w,\mu);\lambda_2(w,\mu)].$

Пороговые эффекты для оператора $\hat{\mathcal{A}}_\mu$. Рассмотрим случай $\mathrm{d}=3.$

Определение 2.3.1. *Пусть* $w\neq m$ (*соответственно* $w\neq M$). *Говорят, что оператор* $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ *имеет виртуальный уровень в точке*

$z=m$ (*соответственно* $z=M$), *если число* 1 *является собственным значением интегрального оператора*

$$(G_m\psi)(p)=\frac{\mu^2 v(p)}{w-m}\int_{\mathbb{T}^3}\frac{v(s)\psi(s)ds}{u(s)-m},\quad \psi\in C(\mathbb{T}^3),$$

соответственно

$$(G_M\psi)(p)=\frac{\mu^2 v(p)}{w-M}\int_{\mathbb{T}^3}\frac{v(s)\psi(s)ds}{u(s)-M},\quad \psi\in C(\mathbb{T}^3),$$

и по крайней мере одна (*с точностью до константы*) *соответствующая собственная функция* $\psi(\cdot)$ *удовлетворяет условию* $\psi(p_i)\neq 0$ *при некотором* $i\in\{1,\ldots,N_1\}$ (*соответственно* $\psi(q_j)\neq 0$ *при некотором* $j\in\{1,\ldots,N_2\}$).

В следующей лемме формулируются необходимые и достаточные условия для того, чтобы либо число $z=m$ (соответственно $z=M$) являлось собственным значением оператора $\hat{\mathcal{A}}_\mu$, либо оператор $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ имел виртуальный уровень в точке $z=m$ (соответственно $z=M$).

Лемма 2.3.3. 1) *Число* $z=m$ $(z=M)$ *является собственным значением оператора* $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ *тогда и только тогда, когда* $\hat{\Delta}_\mu(w;m)=0$ *и* $v(p_i)=0,\ i=\overline{1,N_1}$ $(\Delta_\mu(w;M)=0$ *и* $v(q_j)=0,\ j=\overline{1,N_2})$.

2) *Оператор* $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ *имеет виртуальный уровень в точке* $z=m$ $(z=M)$ *тогда и только тогда, когда* $\Delta_\mu(w;m)=0$ *и* $v(p_i)\neq 0$ *при некотором* $i\in\{1,\ldots,N_1\}$ $(\Delta_\mu(w;M)=0$ *и* $v(q_j)\neq 0$ *при некотором* $j\in\{1,\ldots,N_2\})$.

Для доказательства леммы 2.3.3 в случае $z=m$ достаточно воспользоваться схемой доказательства теоремы 1 из работы [43]. А случай $z=M$ доказывается аналогично.

Отметим, что в ходе доказательства теоремы 1 в [43] показано, что если число $z=m$ является собственным значением оператора $\hat{\mathcal{A}}_\mu$, то только (с точностью до константы) вектор $f=(f_0,f_1)$, где f_0 и f_1 имеют вид

$$f_0=const\neq 0,\quad f_1(p)=-\frac{\mu v(p)f_0}{u(p)-m},$$

удовлетворяет уравнению $\hat{\mathcal{A}}_\mu f=mf$, более того, $f_1\in L_2(\mathbb{T}^3)$ тогда и только тогда, когда $v(p_i)=0,\ i=\overline{1,N_1}$. Также в [43] установлено, что если оператор $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ имеет виртуальный уровень в точке $z=m,$ то $f_1\in L_1(\mathbb{T}^3)\setminus L_2(\mathbb{T}^3)$. Это и означает, что в определении 2.3.1 требование наличия собственного значения 1 оператора G_m соответствует существованию решения уравнения $\hat{\mathcal{A}}_\mu f=mf$, а из условия $\psi(p_i)\neq 0$ при некотором $i\in\{1,\ldots,N_1\}$ следует, что решение f этого уравнения не принадлежит пространству $\hat{H}$. Аналогичные утверждения верны для случая $z=M$.

Так как m и M являются граничными точками $\sigma_{ess}(\hat{\mathcal{A}}_\mu)$ в случае, когда эти числа являются собственными значениями оператора $\hat{\mathcal{A}}_\mu$, мы назовём их пороговыми собственными значениями этого оператора.

Лемма 2.3.4. *Если либо число $z=m$ $(z=M)$ является собственным значением оператора $\hat{\mathcal{A}}_\mu$, либо оператор $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ имеет виртуальный уровень в точке $z=m$ $(z=M)$, то оператор $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ не имеет собственных значений, лежащих левее m* (правее M).

Доказательство. Если число $z=m$ является собственным значением оператора $\hat{\mathcal{A}}_\mu$, либо оператор $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ имеет виртуальный уровень в точке $z=m$, то в силу леммы 2.3.3 имеем $\hat{\Delta}_\mu(w;m)=0.$ Из монотонности функции $\hat{\Delta}_\mu(w;\cdot)$ следует, что для любого $z<0$ верно $\hat{\Delta}_\mu(w;z)>\hat{\Delta}_\mu(w;0)=0.$ По лемме 2.3.1 это означает, что оператор $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ не имеет собственных значений, лежащих левее $m.$

Случай $z = M$ рассматривается аналогично. Лемма 2.3.4 доказана.

Теорема 2.3.4 *Верны следующие утверждения:*

1) *если числа* m и M *являются “пороговыми” собственными значениями оператора* $\hat{\mathcal{A}}_\mu$, *то* $W(\hat{\mathcal{A}}_\mu) = [m; M]$;

2) *если число* $z = m$ *является “пороговым” собственным значением оператора* $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ *и этот оператор также имеет виртуальный уровень в точке* $z = M$, то $W(\hat{\mathcal{A}}_\mu) = [m; M)$;

3) *если оператор* $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ *имеет виртуальный уровень в точке* $z = m$ *и число* $z = M$ *является “пороговым” собственным значением оператора* $\hat{\mathcal{A}}_\mu$, *то* $W(\hat{\mathcal{A}}_\mu) = (m; M]$;

4) *если оператор* $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ *имеет виртуальные уровни в точках* $z = m$ *и* $z = M$, *то* $W(\hat{\mathcal{A}}_\mu) = (m; M)$.

Доказательство. Если выполняются условия в утверждениях теоремы 2.3.4, то в силу равенства (2.3.1) и леммы 2.3.4 имеем $\sigma(\hat{\mathcal{A}}_\mu) = [m; M]$. Как отмечалось выше, в случае, когда оператор $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ имеет виртуальный уровень в точке $z = m$, соответствующий вектор f не принадлежит $\hat{H}$. Поэтому в этом случае $m \notin W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)$. Пусть число $z = m$ является “пороговым” собственным значением оператора $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ и $f -$соответствующий вектор. Положим $\tilde{f} = f / \| f \|$. Тогда $(\hat{\mathcal{A}}_\mu \tilde{f}, \tilde{f}) = m(\tilde{f}, \tilde{f}) = m,$ т.е. $m \in W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)$. Теорема 2.3.4 доказана.

Следующий пример показывает, что класс функций $v(\cdot)$ и $u(\cdot)$, удовлетворяющих условиям теоремы 2.3.4, непуст. Простые вычисления дают, что если

$$w = \frac{m\mu_l^2 + M\mu_r^2}{\mu_l^2 + \mu_r^2}, \quad \mu = \frac{(M - m)\mu_l^2\mu_r^2}{\mu_l^2 + \mu_r^2},$$

то равенства $\hat{\Delta}_\mu(w;m)=0$ и $\hat{\Delta}_\mu(w;M)=0$ выполняются одновременно независимо от функций $v(\cdot)$ и $u(\cdot)$.

Пусть

$$u(p)=\sum_{i=1}^{3}(1-\cos p^{(i)}).$$

Тогда функция $u(\cdot)$ имеет единственный невырожденный минимум в точке $p_1=\bar{0}\in\mathbb{T}^3$ и единственный невырожденный максимум в точке $q_1=\bar{\pi}\in\mathbb{T}^3$. Далее

1) если $v(p)=1-\cos(2p^{(1)})$, то $v(p_1)=v(q_1)=0$;

2) если $v(p)=1-\cos p^{(1)}$, то $v(p_1)=0$ и $v(q_1)=2\neq 0$;

3) если $v(p)=1+\cos p^{(1)}$, то $v(p_1)=2\neq 0$ и $v(q_1)=0$;

4) если $v(p)=\cos p^{(1)}$, то $v(p_1)=1\neq 0$ и $v(q_1)=-1\neq 0$.

При этом, сравнивая соответствующие условия леммы 2.3.3, получим, что выполняются условия теоремы 2.3.4.

Если $\hat{\Delta}_\mu(w;m)>0$, то в силу леммы 2.3.3 число $z=m$ не является "пороговым" собственным значением оператора $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ и этот оператор не имеет виртуальный уровень в точке $z=m$. В этом случае $m\notin W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)$.

Допустим противное. Пусть $m\in W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)$. Тогда существует $f=(f_0,f_1)\in\hat{H}$ такой, что $\|f\|=1$ и $(\hat{\mathcal{A}}_\mu f,f)=m$. В этом случае легко можно показать, что $f_0=0$, а функция $f_1\in H_1$ ортогональна к $v(\cdot)$ и $\|f\|_1=1$. Имеем

$$(\hat{\mathcal{A}}_\mu f,f)-m=\int_{\mathbb{T}^3}(u(s)-m)|f_1(s)|^2\,ds=0.$$

Отсюда следует, что $f_1\equiv 0$, а это противоречит условию нормировки $\|f\|=1$. Значит, $m\notin W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)$.

Таким образом, равенство $W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)=[m;M]$ выполняется тогда и только тогда, когда числа m и M являются "пороговыми" собственными значениями оператора $\hat{\mathcal{A}}_\mu$

§2.4. Оценки для квадратичной числовой области значений семейства обобщенных моделей Фридрихса

В настоящем параграфе мы продолжаем изучать операторную матрицу $\hat{\mathcal{A}}_\mu$, изученную в параграфе 2.3. Следует отметить, что в параграфе 2.3 исследована числовая область значений $W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)$ операторной матрицы $\hat{\mathcal{A}}_\mu$. В данном параграфе найдена эквивалентная формула для квадратичной числовой области значений $W^2(\hat{\mathcal{A}}_\mu)$ операторной матрицы $\hat{\mathcal{A}}_\mu$.

Одним из важных свойств квадратичной числовой области значений, подобно числовой области значений, является то, что она обладает свойством спектрального включения (см. [1]):

$$\sigma_p(\hat{\mathcal{A}}_\mu)\subset W^2(\hat{\mathcal{A}}_\mu), \qquad \sigma(\hat{\mathcal{A}}_\mu)\subset \overline{W^2(\hat{\mathcal{A}}_\mu)}.$$

Так как квадратичная числовая область значений содержится в числовой области значений, это дает возможное наименьшее спектральное вложение:

$$\sigma_p(\hat{\mathcal{A}}_\mu)\subset W^2(\hat{\mathcal{A}}_\mu)\subset W(\hat{\mathcal{A}}_\mu), \;\; \sigma(\hat{\mathcal{A}}_\mu)\subset \overline{W^2(\hat{\mathcal{A}}_\mu)}\subset \overline{W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)}.$$

Следовательно, в силу невыпуклости, квадратичная числовая область значений $W^2(\hat{\mathcal{A}}_\mu)$ может дать нам хорошую локализацию спектра $\sigma(\hat{\mathcal{A}}_\mu)$, чем числовая область значений $W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)$.

Так как оператор $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ является самосопряженным, из определения множества $W^2(\hat{\mathcal{A}}_\mu)$ следует, что $W^2(\hat{\mathcal{A}}_\mu)\subset\mathbb{R}$.

Для формулировки основных результатов данного параграфа введем следующие обозначения:

$$\Lambda_\mu^- := \bigcup_{\|f_1\|=1}\left\{\min\{w,(uf_1,f_1)\} - \mu\,|(v,f_1)|\,tg\left(\frac{1}{2}arctg\frac{2\mu\,|(v,f_1)|}{|w-(uf_1,f_1)|}\right)\right\};$$

$$\Lambda_\mu^+ := \bigcup_{\|f_1\|=1}\left\{\max\{w,(uf_1,f_1)\} + \mu|(v,f_1)|tg\left(\frac{1}{2}arctg\frac{2\mu|v,f_1|}{|w-(uf_1,f_1)|}\right)\right\}.$$

Положим

$$\delta_{\mu,v}^- := \mu\|v\|\,tg\left(\frac{1}{2}arctg\frac{2\mu\|v\|}{|w-m|}\right),\quad \delta_{\mu,v}^+ := \mu\|v\|\,tg\left(\frac{1}{2}arctg\frac{2\mu\|v\|}{|M-w|}\right).$$

В случае $m=w$ или $M=w$ положим $arctg\infty := \pi/2$.

Одним из основных результатов настоящего параграфа является следующая лемма.

Лемма 2.4.1. *Для квадратичной числовой области значений оператора* $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ *имеет место равенство* $W^2(\hat{\mathcal{A}}_\mu) = \Lambda_\mu^- \cup \Lambda_\mu^+$.

Доказательство. Сначала для любого $f=(f_0,f_1)\in H$, $\|f_i\|=1$, $i=0,1$ найдем спектр $\sigma(\hat{\mathcal{A}}_{\mu,f})$ матрицы

$$\hat{\mathcal{A}}_{\mu,f} := \begin{pmatrix} (A_{00}f_0,f_0) & \mu(A_{01}f_1,f_0) \\ \mu(A_{01}^*f_0,f_1) & (A_{11}f_1,f_1) \end{pmatrix}.$$

Ясно, что нули характеристического уравнения

$$\lambda^2-(w+(uf_1,f_1))\lambda + w(uf_1,f_1)-\mu^2\,|(v,f_1)|^2=0,$$

т.е., числа

$$\lambda_\mu^\pm(f_1) := \frac{w+(uf_1,f_1)}{2} \pm \frac{\sqrt{(w-(uf_1,f_1))^2+4\mu^2\,|(v,f_1)|^2}}{2}$$

являются собственными значениями матрицы $\hat{\mathcal{A}}_{\mu,f}$.

Берем $\lambda_\mu^-(f_1)$ и используя соотношение

$$\frac{a+b}{2} = \min\{a,b\} + \frac{|a-b|}{2},\quad a,b\in\mathbb{R}$$

перепишем его в виде

$$\lambda_\mu^-(f_1) = \min\{w,(uf_1,f_1)\} - \frac{\sqrt{(w-(uf_1,f_1))^2+4\mu^2\,|(v,f_1)|^2} - |w-(uf_1,f_1)|}{2}.$$

Теперь простые вычисления показывают, что

$$\frac{\sqrt{(w-(uf_1,f_1))^2+4\mu^2\,|(v,f_1)|^2} - |w-(uf_1,f_1)|}{2\mu\,|(v,f_1)|} = tg\left(\frac{1}{2}arctg\frac{2\mu\,|(v,f_1)|}{|w-(uf_1,f_1)|}\right).$$

Тогда $\lambda_\mu^-(f_1)$ можно записать следующим образом:

$$\lambda_\mu^-(f_1)=\min\{w,(uf_1,f_1)\}-\mu|(v,f_1)|tg\left(\frac{1}{2}arctg\frac{2\mu|(v,f_1)|}{|w-(uf_1,f_1)|}\right).$$

Совершенно аналогично показывается, что

$$\lambda_\mu^+(f_1)=\max\{w,(uf_1,f_1)\}+\mu|(v,f_1)|tg\left(\frac{1}{2}arctg\frac{2\mu|(v,f_1)|}{|w-(uf_1,f_1)|}\right).$$

Теперь доказательство леммы 2.4.1 вытекает из определения множества $W^2(\hat{\mathcal{A}}_\mu)$. Лемма 2.4.1 полностью доказана.

В работе [44] найдена аналогичная формула для общих $2\times 2-$операторных матриц и получены оценки для границы компонент квадратичной числовой области значений (а также см [1]).

В следующей теореме мы получим аналог этих оценок для границы квадратичной числовой области значений обобщенной модели Фридрихса $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ и используем их при определении более точного множества, в котором заведомо лежат собственные значения оператора $\hat{\mathcal{A}}_\mu$.

Теорема 2.4.1. *Пусть* $\mu>0-$*произвольная число*.

1) *Если* $w>M$, *то* $\Lambda_\mu^-\cap\Lambda_\mu^+=\varnothing$ *и выполняется соотношение*

$$\sup\Lambda_\mu^-\le M<w\le\inf\Lambda_\mu^+; \tag{2.4.1}$$

2) *если* $w<m$, *то* $\Lambda_\mu^-\cap\Lambda_\mu^+=\varnothing$ *и выполняется соотношение*

$$\sup\Lambda_\mu^-\le w<m\le\inf\Lambda_\mu^+;$$

3) *если* $m\le w\le M$, *то для границы множества* $\Lambda_\mu^\pm$ *имеют место следующие оценки:*

$$m-\delta_{\mu,v}^-\le\inf\Lambda_\mu^-\le m,\quad \sup\Lambda_\mu^-\le w; \tag{2.4.2}$$

$$\inf\Lambda_\mu^+\ge m,\quad M\le\sup\Lambda_\mu^+\le M+\delta_{\mu,v}^+. \tag{2.4.3}$$

Доказательство. 1) Докажем соотношение (2.4.1). Затем равенство $\Lambda_\mu^-\cap\Lambda_\mu^+=\varnothing$ автоматически вытекает из этого соотношения. В силу условия $M<w$ имеем

$$0\le tg\left(\frac{1}{2}arctg\frac{2\mu|(v,f_1)|}{|w-(uf_1,f_1)|}\right)<1.$$

Следовательно,

$$\sup\Lambda_\mu^-\le\sup\bigcup_{\|f_1\|=1}\min\{w,(uf_1,f_1)\}=\sup\bigcup_{\|f_1\|=1}(uf_1,f_1)\le M;$$

$$\inf\Lambda_\mu^+\ge\inf\bigcup_{\|f_1\|=1}\max\{w,(uf_1,f_1)\}=w.$$

Отсюда следует доказательство соотношения (2.4.1).

Доказательство части 2) аналогично.

3) Пусть $m\le w\le M$. При любом $f_1\in H_1$, $\|f_1\|=1$ для $\lambda_\mu^-(f_1)$ получим

$$\lambda_\mu^-(f_1)=\frac{w+(uf_1,f_1)}{2}-\sqrt{\left(\frac{w-(uf_1,f_1)}{2}\right)^2+\mu^2|(v,f_1)|^2}$$

$$\le\frac{w+(uf_1,f_1)}{2}-\left|\frac{w-(uf_1,f_1)}{2}\right|=\min\{w,(uf_1,f_1)\}.$$

Отсюда следует, что

$$\sup\Lambda_\mu^-\le\sup\bigcup_{\|f_1\|=1}\min\{w,(uf_1,f_1)\}\le\min\{w,M\}=w;$$

$$\inf\Lambda_\mu^-\le\inf\bigcup_{\|f_1\|=1}\min\{w,(uf_1,f_1)\}\le\min\{w,m\}=m.$$

Теперь докажем оценку $\inf\Lambda_\mu^-\ge m-\delta_{\mu,v}^-$. Для этого $\lambda_\mu^-(f_1)$ перепишем как

$$\lambda_\mu^-(f_1)=\min\{w,(uf_1,f_1)\}-\mu|(v,f_1)|\,tg\left(\frac{1}{2}arctg\frac{2\mu|(v,f_1)|}{|w-(uf_1,f_1)|}\right).$$

Предположим, что $w\ge(uf_1,f_1)$. Тогда

$$\lambda_\mu^-(f_1)=(uf_1,f_1)-\mu|(v,f_1)|\,tg\left(\frac{1}{2}arctg\frac{2\mu|(v,f_1)|}{w-(uf_1,f_1)}\right).$$

При каждом фиксированном $f_1\in H_1$ определим вспомогательную функцию

$$h_{\mu,f_1}(t):=t-\mu|(v,f_1)|\,tg\left(\frac{1}{2}arctg\frac{2\mu|(v,f_1)|}{w-t}\right),\quad t\in\mathbb{R}.$$

Видно, что для любого $t \neq w$ существует производная $h'_{\mu,f_1}(t)$, удовлетворяющая следующему соотношению

$$h'_{\mu,f_1}(t) = 1 - \frac{(w-t)^2 + 4\mu^2 |(v,f_1)|^2 - 2|w-t|\sqrt{(w-t)^2 + 4\mu^2 |(v,f_1)|^2}}{2[(w-t)^2 + 4\mu^2 |(v,f_1)|^2]} \geq \frac{1}{2}.$$

Таким образом функция $h_{\mu,f_1}(\cdot)$ монотонно возрастает. Причем она имеет скачок, равный $2\mu|(v,f_1)|$ в особой точке $t = w.$ Следовательно, если $w \geq (uf_1, f_1),$ то

$$\lambda_\mu^-(f_1) \geq m - \mu|(v,f_1)|\,tg\left(\frac{1}{2}arctg\frac{2\mu|(v,f_1)|}{w-m}\right) \geq$$

$$\geq m - \mu\|v\|\,tg\left(\frac{1}{2}arctg\frac{2\mu\|v\|}{w-m}\right) = m - \delta_{\mu,v}^-.$$

Если $w < (uf_1, f_1),$ то аналогично получим, что

$$\lambda_\mu^-(f_1) = w - \mu|(v,f_1)|\,tg\left(\frac{1}{2}arctg\frac{2\mu|(v,f_1)|}{(uf_1,f_1)-w}\right) \geq$$

$$\geq m - \mu|(v,f_1)|\,tg\left(\frac{1}{2}arctg\frac{2\mu|(v,f_1)|}{(uf_1,f_1)-w}\right) \geq$$

$$\geq m - \mu\|v\|\,tg\left(\frac{1}{2}arctg\frac{2\mu\|v\|}{w-m}\right) = m - \delta_{\mu,v}^-.$$

Таким образом, соотношение (2.4.2) полностью доказано.

Аналогичным образом можно доказать соотношение (2.4.3).

Таким образом, доказаны все утверждения теоремы 2.4.1.

Теорема 2.4.1 позволяет получить более точную информация о местоположении собственных значений оператора $\hat{\mathcal{A}}_\mu$. В ходе доказательства теоремы 2.3.1 установлено, что если $w < m$, то для любого $\mu > 0$ оператор $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ имеет единственное собственное значения $\lambda_1(w,\mu)$ в $(-\infty; m)$ и $\lambda_1(w,\mu) \in \Lambda_\mu^-$. Учитывая утверждения 2) теоремы 2.4.1 имеем $\lambda_1(w,\mu) \leq \sup\Lambda_\mu^- \leq w < m$.

Утверждение 2.4.1. *Пусть* $u(p) \equiv u_0 = const$. *При* $w = u_0$ *имеет место равенство* $W^2(\hat{\mathcal{A}}_\mu) = [w - \mu\|v\|, w + \mu\|v\|]$.

Доказательство. Пусть $u(p) \equiv u_0 = const$ и $w = u_0$. Тогда

$$arctg\frac{2\mu|(v,f_1)|}{|w-(uf_1,f_1)|}=\frac{\pi}{2}.$$

Учитывая это соотношение имеем

$$\Lambda_\mu^- = \bigcup_{\|f_1\|=1}\{\min\{w,u_0\}-\mu|(v,f_1)|\} = \bigcup_{|f_1\|=1}(w-\mu|(v,f_1)|); \qquad (2.4.4)$$

$$\Lambda_\mu^+ = \bigcup_{\|f_1\|=1}\{\max\{w,u_0\}+\mu|(v,f_1)|\} = \bigcup_{|f_1\|=1}(w+\mu|(v,f_1)|). \qquad (2.4.5)$$

Если $\tilde{f}_1-$нормированный элемент, ортогональный к $v,$ то $(v,\tilde{f}_1)_1=0.$ Отсюда следует, что минимальное значение $|(v,f_1)|$ есть 0, которое достигается при $f_1=\tilde{f}_1.$ Тогда из равенства (2.4.4) и (2.4.5) следует, что

$$\max\Lambda_\mu^- = w, \quad \min\Lambda_\mu^+ = w. \qquad (2.4.6)$$

Если $\hat{f}_1 = v/\|v\|,$ то $(v,\tilde{f}_1)=\|v\|.$ С другой стороны

$$\max_{\|f_1\|=1}|(v,f_1)|\le\max_{\|f_1\|=1}\{\|v\|\cdot\|f_1\|\}=\|v\|.$$

Значит, максимальное значение $|(v,f_1)|$ есть $\|v\|,$ которое достигается при $f_1=\hat{f}_1.$ Таким образом

$$\min\Lambda_\mu^- = w-\mu\|v\|, \quad \max\Lambda_\mu^+ = w+\mu\|v\|. \qquad (2.4.7)$$

Учитывая равенства (2.4.6) и (2.4.7) и лемму 2.4.1, а также непрерывность скалярного произведения имеем, что

$$W^2(\hat{\mathcal{A}}_\mu)=[w-\mu\|v\|;w+\mu\|v\|].$$

Утверждение 2.4.1 полностью доказано.

Отметим, что если в утверждении 2.4.1 выполняется неравенство $w\neq u_0,$ то из утверждений 1) и 2) теоремы 2.4.1 автоматически вытекает, что $\Lambda_\mu^-\cap\Lambda_\mu^+=\varnothing.$

Очевидно, что если $f_1\in H_1$ с нормой 1 ортогонален к $v,$ а $f_0\in H_0-$произвольный нормированный элемент, то для таких $f=(f_0,f_1)\in\hat{H}$ матрица $\hat{\mathcal{A}}_{\mu,f}$ имеет собственное значение, равное $w.$ Следовательно, $w\in W^2(\hat{\mathcal{A}}_\mu).$

ГЛАВА III. СПЕКТР ОДНОЙ $2\times 2-$ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ. АСИМПТОТИКА ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА

В главе III рассматривается $2\times 2-$операторная матрица $\mathcal{A}_\mu$, действующая в прямой сумме одночастичного и двухчастичного подпространств бозонного пространства Фока.

В первом параграфе главы III введена операторная матрица $\mathcal{A}_\mu$ и построен аналог уравнения типа Фаддеева для собственных функций операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$. Доказан принцип Бирмана-Швингера для оператора $\mathcal{A}_\mu$.

В параграфе 3.2 описано местоположение существенного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$ с помощью спектров семейства обобщенных моделей Фридрихса, т.е. выделены двухчастичная и трехчастичная ветви существенного спектра. Кроме того, определено местоположение ветви существенного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$.

В параграфе 3.3 найдено критическое значение μ_0 параметра взаимодействия μ, такое что операторная матрица $\mathcal{A}_{\mu_0}$ имеет бесконечное число собственных значений. Они накапливаются к нижней и верхней граням существенного спектра. Получена асимптотика для числа таких собственных значений, лежащих как слева, так и справа от существенного спектра.

Следует отметить, что в непрерывном случае двухчастичная и трехчастичная ветви непрерывного спектра оператора, рассмотренные в работах [24, 45], состоят из полуоси и они пересекаются. В данном случае, в отличие от непрерывного случая двухчастичная и трехчастичная ветви существенного спектра матричного оператора $\mathcal{A}_\mu$ заполняют отрезки конечной длины. Поэтому вывод о существовании бесконечного числа собственных значений, лежащих как левее существенного спектра оператора $\mathcal{A}_\mu$, так и правее, характерен только для решетчатых моделей и не имеет аналога в непрерывном случае. Заметим, что во всех работах, посвященных существованию эффекта Ефимова для дискретного оператора Шредингера (см., например, [15, 16, 19, 20, 46]) и для матричных операторов (см., например, [7-9, 23-25]), изучено число собственных значений, лежащих левее трехчастичной ветви существенного спектра. С этой точкой зрения результат о существовании двустороннего эффекта Ефимова является новым.

§3.1. Аналог уравнения типа Фаддеева для собственных функций одной $2\times 2-$ операторной матрицы

Обозначим через H прямую сумма пространств $H_1 := L_2(\mathbb{T}^3)$ и $H_2 := L_2^s((\mathbb{T}^3)^2)$, т.е. $H := H_1 \oplus H_2$. В гильбертовом пространстве H рассматривается $2\times 2-$ операторная матрица

$$\mathcal{A}_\mu := \begin{pmatrix} A_{11} & \mu A_{12} \\ \mu A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix},$$

где матричные элементы $A_{ij} : H_j \to H_i, i \le j, i, j = 1, 2$ определяются по формулам

$$(A_{11} f_1)(k) = w_0(k) f_1(k), \quad (A_{12} f_2)(k) = \int_{\mathbb{T}^3} f_2(k,s) ds,$$

$$(A_{22} f_2)(k,p) = w_1(k,p) f_2(k,p), \quad f_i \in H_i, \quad i = 1, 2.$$

Здесь $\mu > 0 -$ параметр взаимодействия, а функции $w_0(\cdot)$ и $w_1(\cdot;\cdot)$ имеют вид (2.1.2).

При этом $A_{12}^* : H_1 \to H_2$ – сопряженный оператор к A_{12} и

$$(A_{12}^* f_1)(k,p) = \frac{1}{2}(f_1(k) + f_1(p)), \qquad f_1 \in H_1.$$

В этих предположениях операторная матрица $\mathcal{A}_\mu$ является ограниченной и самосопряженной в H.

Положим

$$\Lambda_\mu := \bigcup_{k\in\mathbb{T}^3}\sigma_{disc}(\mathcal{A}_{\mu/\sqrt{2}}(k)), \quad \Sigma_\mu := [0;18]\cup\Lambda_\mu.$$

Здесь семейство обобщенных моделей Фридрихса $\mathcal{A}_\mu(k)$ определено по формуле (2.1.1). Тогда в силу леммы 2.1.2 множество Λ_μ также можно определить как множество тех точек $z\in\mathbb{C}\setminus[m(k);M(k)]$, для которых равенство $\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k\,;z)=0$ имеет место хотя бы для одного $k\in\mathbb{T}^3$.

При каждом фиксированном $z\in\mathbb{C}\setminus\Sigma_\mu$ рассмотрим интегральный оператор $T_\mu(z)$, действующий в пространстве H_1 как

$$(T_\mu(z)g)(p) := \frac{\mu^2}{2\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(p;z)}\int_{\mathbb{T}^3}\frac{g(t)dt}{w_1(p,t)-z}$$

Следующая теорема является аналогом известного результата Фаддеева для операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$ и устанавливает связь между собственными значениями операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$ и интегрального оператора $T_\mu(z)$.

Лемма 3.1.1. *Число $z\in\mathbb{C}\setminus\Sigma_\mu$ является собственным значением операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$ тогда и только тогда, когда число $\lambda=1$ является собтвенным значением интегрального оператора $T_\mu(z)$. Кроме того, собственные значения z и 1 имеют одинаковую кратность.*

Доказательство. Пусть $z\in\mathbb{C}\setminus\Sigma_\mu$ – собственное значение операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$ и $f=(f_1,f_2)\in H$ – соответствующая собственная вектор-функция. Тогда функции f_1 и f_2 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases}(w_0(k)-z)\,f_1(k)+\mu\int\limits_{\mathbb{T}^3} f_2(k,t)dt=0;\\ \dfrac{\mu}{2}(f_1(k)+f_1(p))+(w_1(k,p)-z)\,f_2(k,p)=0.\end{cases} \tag{3.1.1}$$

Поскольку $z \notin [0;18]$, для всех $k, p \in \mathbb{T}^3$ имеем $w_1(k,p) - z \neq 0$. Тогда из второго уравнения системы (3.1.1) для f_2 имеем

$$f_2(k,p) = -\frac{\mu(f_1(k) + f_1(p))}{2(w_1(k,p) - z)}. \qquad (3.1.2)$$

Подставляя выражение (3.1.2) для f_2 в первое уравнение системы (3.1.1), имеем

$$\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k;z) f_1(k) - \frac{\mu^2}{2} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{f_1(t)dt}{w_1(k,t) - z} = 0. \qquad (3.1.3)$$

Из определения множества Σ_μ следует, что для всех $z \notin \Sigma_\mu$ и $k \in \mathbb{T}^3$ верно $\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k;z) \neq 0$.

Следовательно, уравнение (3.1.3) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда интегральное уравнение

$$f_1(k) = \frac{\mu^2}{2\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k;z)} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{f_1(t)dt}{w_1(k,t) - z}$$

или операторное уравнение

$$f_1 = T_\mu(z) f_1, \quad f_1 \in H_1 \qquad (3.1.4)$$

имеет ненулевое решение.

Теперь докажем, что линейные подпространства, порожденные решениями уравнений (3.1.2) и (3.1.4), имеют одинаковые размерности.

Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_\mu - n$-кратное собственное значение операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$ и число $\lambda = 1$ является m-кратным собственным значением интегрального оператора $T_\mu(z)$. Докажем, что $n = m$.

Допустим противное. Пусть $n < m$. Тогда существуют линейно независимые собственные функции $\varphi_i, i = \overline{1,m}$, соответствующие собственному значению $\lambda = 1$ интегрального оператора $T_\mu(z)$. В этом случае при $i = \overline{1,m}$ ненулевая вектор-функция $f^{(i)} := (f_1^{(i)}, f_2^{(i)})$ удовлетворяет уравнению $\mathcal{A}_\mu f^{(i)} = z f^{(i)}$.

Здесь $f_1^{(i)}=\varphi_i$, а функция $f_2^{(i)}$ $(i=\overline{1,m})$ определяется по формуле (3.1.2) с условием $f_1=f_1^{(i)}$. Поскольку $n<m$, существует ненулевой вектор $(c_1,\dots,c_m)\in\mathbb{C}^m$, такой что

$$\sum_{i=1}^{m}c_i f^{(i)}=\theta \qquad \text{и} \qquad \sum_{i=1}^{m}c_i\varphi_i\neq\theta$$

Тогда

$$\theta=\sum_{i=1}^{m}c_i f^{(i)}=\left(\sum_{i=1}^{m}c_i f_1^{(i)}(k);\sum_{i=1}^{m}c_i f_2^{(i)}(k,p)\right)=$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{m}c_i\varphi_i(k);-\frac{\mu}{2(w_1(k,p))-z}\sum_{i=1}^{m}(c_i\varphi_i(k)+c_i\varphi_i(p))\right)\neq\theta.$$

Это противоречит соотношению $n<m.$

Пусть теперь $n>m.$ Тогда для $i=\overline{1,n}$ существуют линейно независимые собственные вектор-функции $f^{(i)}=(f_1^{(i)};f_2^{(i)})$ соответствующие собственному значению z операторной матрица $\mathcal{A}_\mu$. А функции $\varphi_i=f_1^{(i)},i=\overline{1,n}$ являются собственными функциями, соответствующими собственному значению $\lambda=1$ интегрального оператора $T_\mu(z)$.

Поскольку $n>m$, существует вектор $(c_1,\dots,c_n)\in\mathbb{C}^n$, такой что

$$\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i=\theta \qquad \text{и} \qquad \sum_{i=1}^{n}c_i f^{(i)}\neq\theta;$$

Поэтому

$$\theta\neq\sum_{i=1}^{m}c_i f^{(i)}=\left(\sum_{i=1}^{m}c_i f_1^{(i)}(k);\sum_{i=1}^{m}c_i f_2^{(i)}(k,p)\right)=$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{m}c_i\varphi_i(k);-\frac{\mu}{2(w_1(k,p))-z}\sum_{i=1}^{m}(c_i\varphi_i(k)+c_i\varphi_i(p))\right)=\theta.$$

Отсюда вытекает, что соотношение $n>m$ не выполняется.

Лемма 3.1.1 доказана.

Отметим, что операторное уравнение (3.1.4) обычно называется аналогом уравнения типа Фаддеева для собственных функций операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$ и оно играет важную роль при исследованиии спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$.

Принцип Бирмана-Швингера. Для любого $\lambda \in \mathbb{R}$, определим число $n(\lambda, \mathcal{A}_\mu)$ как

$$n(\lambda, \mathcal{A}_\mu) := \sup\{\dim F : (\mathcal{A}_\mu u, u) > \lambda, u \in F \subset H, \| u \| = 1\}.$$

Величина $n(\lambda, \mathcal{A}_\mu)$ бесконечна, если $\lambda < \max \sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu)$. Если $n(\lambda, \mathcal{A}_\mu)$ конечно, то оно равно числу собственных значений операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$, больших чем λ, с учетом кратности.

Обозначим через $\tau_{\min}(\mathcal{A}_\mu)$ и $\tau_{\max}(\mathcal{A}_\mu)$ нижную и верхную грани существенного спектра $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu)$ операторной матрица $\mathcal{A}_\mu$, соответственно, т.е.,

$$\tau_{\min}(\mathcal{A}_\mu) :\equiv \min \sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu), \quad \tau_{\max}(\mathcal{A}_\mu) :\equiv \max \sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu).$$

По определению числа $N_{(a;b)}(\mathcal{A}_\mu)$ имеем,

$$N_{(-\infty;z)}(\mathcal{A}_\mu) = n(-z, -\mathcal{A}_\mu), \quad z < \tau_{\min}(\mathcal{A}_\mu),$$
$$N_{(z;+\infty)}(\mathcal{A}_\mu) = n(z, \mathcal{A}_\mu), \quad z > \tau_{\max}(\mathcal{A}_\mu).$$

Отметим, что для любых $k \in \mathbb{T}^3$ и $z < \tau_{\min}(\mathcal{A}_\mu)$ (соответственно $z > \tau_{\max}(\mathcal{A}_\mu)$), функция $\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k; z)$ (соответственно $-\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k; z)$) положительна и, следовательно, существует ее положительной квадратный корень.

В исследованиях дискретного спектра операторной матрица $\mathcal{A}_\mu$ основную роль играет компактный (симметризованный) интегральный оператор $\hat{T}_\mu(z)$, $z \in \mathbb{R} \setminus [\tau_{\min}(\mathcal{A}_\mu); \tau_{\max}(\mathcal{A}_\mu)]$, действующий в H_1 как

$$(\hat{T}_\mu(z)g)(k) = \frac{\mu^2}{2\sqrt{\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k; z)}} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{g(t)dt}{\sqrt{\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(t; z)}(w_1(k,t) - z)},$$

при $z < \tau_{\min}(\mathcal{A}_\mu)$,

$$(\hat{T}_\mu(z)g)(k) = -\frac{\mu^2}{2\sqrt{-\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k; z)}} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{g(t)dt}{\sqrt{-\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(t; z)}(w_1(k,t) - z)},$$

при $z > \tau_{\max}(\mathcal{A}_\mu)$.

Следующая лемма является реализацией известного принципа Бирмана-Швингера для операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$ (см. [7, 13, 14, 18-20, 46]).

Лемма 3.1.2. *При всех* $z \in \mathbb{R} \setminus [\tau_{\min}(\mathcal{A}_\mu); \tau_{\max}(\mathcal{A}_\mu)]$ *оператор* $\hat{T}_\mu(z)$ *компактен и непрерывен по* z *и справедливы равенства*

$$N_{(-\infty;z)}(\mathcal{A}_\mu) = n(1, \hat{T}_\mu(z)), \qquad \text{\textit{при}} \qquad z < \tau_{\min}(\mathcal{A}_\mu),$$

$$N_{(z;+\infty)}(\mathcal{A}_\mu) = n(1, \hat{T}_\mu(z)), \qquad \text{\textit{при}} \qquad z > \tau_{\max}(\mathcal{A}_\mu).$$

Доказательство. Операторную матрицу $\mathcal{A}_\mu$ записываем в виде суммы

$$\mathcal{A}_\mu = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{12}^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $I_i, i = 1,2$ единичный оператор в пространстве $H_i, i = 1,2$. Тогда $I = diag\{I_1, I_2\}$ является единичным оператором в пространстве H.

Для любого $z < \tau_{\min}(\mathcal{A}_\mu)$ операторы $A_{ii} - zI_i, i = 1,2$ положительны и обратимы, поэтому квадратный корень $R_{ii}^{1/2}(z)$ резольвенты $R_{ii}(z) = (A_{ii} - zI_i)^{-1}$ оператора $A_{ii},\ i = 1,2,$ существует.

Пусть $\mathcal{M}(z),\quad z < \tau_{\min}(\mathcal{A}_\mu) - 2\times 2 -$ операторная матрица с элементами

$$M_{\alpha\alpha}(z) = 0, \alpha = 1,2;\ M_{12}(z) = -R_{11}^{1/2}(z) A_{12} R_{22}^{1/2}(z), M_{21}(z) = M_{12}^*(z).$$

Очевидно, что неравенство

$$((\mathcal{A}_\mu - zI) f, f) < 0, f \in H$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$((\mu \mathcal{M}(z) - I) g, g) > 0$$

для $g = (g_1, g_2),$ где $g_i = (A_{ii} - zI_i)^{1/2} f_i,\ i = 1,2.$

Отсюда получаем

$$N_{(-\infty;z)}(\mathcal{A}_\mu) = n(1, \mu \mathcal{M}(z)). \tag{3.1.5}$$

В пространстве H_1 рассмотрим оператор

$$V_\mu(z) := \mu^2 M_{12}(z) M_{21}(z)$$

для $z < \tau_{\min}(\mathcal{A}_\mu)$.

Через $F_\mu \subset H_1$ обозначим такое подпространство, для которого имеет место соотношение $\dim F_\mu = n(1, V_\mu(z))$. Тогда для $f_1 \in F$ и $g = (f_1, \mu M_{21}(z) f_1)$, верно

$$((\mu \mathcal{M}(z) - I)g, g) = ((V_\mu(z) - I_1) f_1, f_1).$$

Следовательно,

$$n(1, \mu \mathcal{M}(z)) = n(1, V_\mu(z)). \qquad (3.1.6)$$

Простые рассуждения показывают, что неравенство

$$((V_\mu(z) - I_1)\varphi, \varphi) > 0, \varphi \in H_1$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$((A_{11} - zI_1)\psi, \psi) < (A_{12} R_{22}(z) A_{12}^* \psi, \psi)$$

при $\psi = R_{11}^{1/2}(z)\varphi.$ Отсюда следует, что

$$n(1, V_\mu(z)) = n(-z, G_\mu(z)), \qquad (3.1.7)$$

где $G_\mu(z) := \mu^2 A_{12} R_{22}(z) A_{12}^* - A_{11}.$

Представим оператор A_{12}^* в виде суммы двух операторов B_1 и B_2 из H_1 в H_2 как

$$(B_1 f_1)(k, p) = \frac{1}{2} f_1(p), \quad (B_2 f_1)(k, p) = \frac{1}{2} f_1(k).$$

Оператор $D_\mu(z) := A_{11} - z - \mu^2 A_{12} R_{22}(z) B_2, \quad z < \tau_{\min}(\mathcal{A}_\mu)$ есть оператор умножения на положительную функцию $\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(\cdot; z)$, определенную на $\mathbb{T}^3$ и он является обратимым. Очевидно, что квадратный корень $D_\mu^{-1/2}(z)$ оператора $D_\mu^{-1}(z)$ является оператором умножения на функцию $\Delta_{\mu/\sqrt{2}}^{-1/2}(\cdot; z)$.

Простейшие вычисления показывают, что неравенство $(G_\mu(z)\varphi, \varphi) > -z(\varphi, \varphi)$ имеет место тогда и только тогда, когда $(\hat{T}_\mu(z)\eta, \eta) > (\eta, \eta)$ для $\eta = D_\mu^{1/2}(z)\varphi$, следовательно,

$$n(-z, G_\mu(z)) = n(1, \hat{T}_\mu(z)). \qquad (3.1.8)$$

Из равенств (3.1.5), (3.1.6), (3.1.7) и (3.1.8) получаем $N_{(-\infty;z)}(\mathcal{A}_\mu) = n(1, \hat{T}_\mu(z))$.

Отметим, что оператор $\hat{T}_\mu(z)$, $z < \tau_{\min}(\mathcal{A}_\mu)$, компактен и непрерывен по z.

Случай, когда $z > \tau_{\max}(\mathcal{A}_\mu)$ доказывается аналогично.

§3.2. Местоположение ветвей существенного спектра одной $2\times 2-$операторной матрицы

Следующая теорема описывает местоположение существенного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$ с помощью спектров семейства обобщенных моделей Фридрихса $\mathcal{A}_{\mu/\sqrt{2}}(k)$.

Теорема 3.2.1. *Для существенного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$ имеет место равенство $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu) = \Sigma_\mu$. Более того, множество Σ_μ представляет собой объединение не более трех отрезков.*

Доказательство. Сначала докажем, что $\Sigma_\mu \subset \sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu)$. Используем определение множества Σ_μ, т.е. $\Sigma_\mu = [0;18] \cup \Lambda_\mu$. Покажем, что $[0;18] \subset \sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu)$.

Пусть $z_0 \in [0;18] -$произвольная точка. Докажем, что $z_0 \in \sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu)$. Для этого удобно воспользоваться критерием Вейля (см. теорема 1.1.3), т.е. достаточно построить последовательность ортонормированных вектор-функций $\{F_n\} \subset H$, для которых $\|(\mathcal{A}_\mu - z_0 I)F_n\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Так как функция $w_1(\cdot,\cdot)-$непрерывна на компактном множестве $(\mathbb{T}^3)^2$, существует точка $(k_0, p_0) \in (\mathbb{T}^3)^2$ такая, что $z_0 = w_1(k_0, p_0)$.

При $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим следующую окрестность точки $(k_0, p_0) \in (\mathbb{T}^3)^2$:

$$W_n := V_n(k_0) \times V_n(p_0),$$

где

$$V_n(k_0) := \left\{ k \in \mathbb{T}^3 : \frac{1}{n+n'+1} < |k - k_0| < \frac{1}{n+n'} \right\}$$

- выколотая окрестность точки $k_0 \in \mathbb{T}^3$ и $n' \in \mathbb{N}$ выбирается так, что $V_n(k_0) \cap V_n(p_0) = \varnothing$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (при условии, что $k_0 \neq p_0$).

Пусть $\mu(\Omega) -$ Лебегова мера множества Ω и $\chi_\Omega(\cdot) -$ характеристическая функция множества Ω. Последовательность вектор-функций $\{F_n\} \subset H$ выбираем следующим образом:

$$F_n := \frac{1}{\sqrt{2\mu(W_n)}} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_{W_n}(k,p) + \chi_{W_n}(p,k) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\{F_n\} -$ ортонормированная последовательность.

При каждом $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим элемент $(\mathcal{A}_\mu - z_0 I)F_n$ и оценим его нормы:

$$\| (\mathcal{A}_\mu - z_0 I)F_n \|^2 \leq \sup_{(k,p)\in W_n} | w_1(k,p) - z_0 |^2 + 2\mu(V_n(k_0)).$$

Из построения множества $V_n(k_0)$ и из непрерывности функции $w_1(\cdot,\cdot)$ следует, что $\|(\mathcal{A}_\mu - z_0 I)F_n\| \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. $z_0 \in \sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu)$. Из произвольности точки z_0 следует, что $[0;18] \subset \sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu)$.

Теперь докажем, что $\Lambda_\mu \subset \sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu)$. Пусть $z_1 \in \Lambda_\mu -$ произвольная точка. Возможны два случая: 1) $z_1 \in [0;18]$, 2) $z_1 \notin [0;18]$. Если $z_1 \in [0;18]$, то, как указано выше, $z_1 \in \sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu)$. Пусть $z_1 \in \Lambda_\mu \setminus [0;18] -$ произвольная точка. Из определения множества Λ_μ и из леммы 2.1.2 следует, что существует точка $k_1 \in \mathbb{T}^3$ такая, что $\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k_1; z_1) = 0$.

Последовательность ортогональных вектор-функций $\{\Phi_n\}$ выберем следующим образом:

$$\Phi_n := \begin{pmatrix} \phi_1^{(n)}(k) \\ \phi_2^{(n)}(k,p) \end{pmatrix},$$

где

$$\phi_1^{(n)}(k) := \frac{c_n(k)\chi_{V_n(k_1)}(k)}{\sqrt{\mu(V_n(k_1))}}, \qquad \phi_2^{(n)}(k,p) := -\frac{\mu(\phi_1^{(n)}(p)+\phi_1^{(n)}(k))}{2(w_1(k,p)-z_1)}.$$

Здесь $\{c_n\} \subset L_2(\mathbb{T}^3)$ – ортонормальная система, она находится из условия ортогональности $\{\Phi_n\}$, т.е.

$$(\Phi_n, \Phi_m) = \frac{\mu^2}{2\sqrt{\mu(V_n(k_1))}\sqrt{\mu(V_m(k_1))}} \times \int\limits_{V_n(k_1)}\int\limits_{V_m(k_1)} \frac{c_n(k)c_m(p)}{(w_1(k,p)-z_1)^2}\,dkdp = 0 \tag{3.2.1}$$

для $n \neq m$. Существование последовательности $\{c_n(\cdot)\}$ вытекает из следующего предложения.

Предложение 3.2.1. *Существует ортонормальная система* $\{c_n(\cdot)\} \subset L_2(\mathbb{T}^3)$, *удовлетворяющая условиям* $\operatorname{supp} c_n(\cdot) \subset V_n(k_1)$ *и* (3.2.1).

Предложение 3.2.1 доказывается аналогично соответствующему предложению из работы [46].

Теперь при каждом $n \in \mathbb{N}$ рассматриваем элемент $(\mathcal{A}_\mu - z_1 I)\Phi_n$ и оценим его норму

$$\|(\mathcal{A}_\mu(k) - z_1 I)\Phi_n\|^2 \leq C(\mu)\cdot\mu(V_n(k_1)) + 2\sup_{k\in V_n(k_1)}|\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k;z_1)|^2 \tag{3.2.2}$$

для некоторого $C(\mu) > 0$.

Поскольку $\mu(V_n(k_1)) \to 0$ и $\sup\limits_{k\in V_n(k_1)}|\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k;z_1)|^2 \to 0$ при $n\to\infty$, из (3.2.2) следует, что $\|(\mathcal{A}_\mu - z_1 I)\Phi_n\| \to 0$ при $n\to\infty$. Это означает, что $z_1 \in \sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu)$. Из произвольности точки z_1 следует, что $\Lambda_\mu \subset \sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu)$. Таким образом, мы доказали, что $\Sigma_\mu \subset \sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu)$.

Теперь докажем обратное включение, а именно, $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu) \subset \Sigma_\mu$. Для этого достаточно показать, что $\mathbb{C}\setminus\Sigma_\mu \subset \mathbb{C}\setminus\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu)$. Доказательство этого включения следует из общей теории Фредгольма. Действительно из определения видно, что $T_\mu(z)$ – компактнозначная аналитическая функция на $\mathbb{C}\setminus\Sigma_\mu$. Из самосопряженности операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$ и леммы 3.1.1 следует, что операторнозначная функция $(I-T_\mu(z))^{-1}$ существует при всех $\operatorname{Im} z\neq 0$. Согласно аналитической теореме Фредгольма 1.1.2 (см. также книгу [38], теорема XIII.13) существует дискретное множество $S_\mu\subset\mathbb{C}\setminus\Sigma_\mu$ (возможно, пустое) такое, что операторнозначная функция $(I-T_\mu(z))^{-1}$ существует и аналитична на $\mathbb{C}\setminus\Sigma_\mu$ всюду, за исключением дискретного множества S_μ (возможно, пустого), где она имеет вычеты конечного ранга. Следовательно, в силу леммы 3.1.1 у оператора $\mathcal{A}_\mu - zI$ существует ограниченный обратный оператор. Если множество $\sigma(\mathcal{A}_\mu)\setminus\Sigma_\mu$ не пусто, то оно состоит из изолированных точек конечной кратности, причем это множество не имеет предельных точек, лежащих в $\mathbb{C}\setminus\Sigma_\mu$, иными словами, $(\mathbb{C}\setminus\Sigma_\mu)\cap\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu)=\varnothing$. Отсюда имеем

$$\sigma(\mathcal{A}_\mu)\setminus\Sigma_\mu\subset\sigma_{disc}(\mathcal{A}_\mu)=\sigma(\mathcal{A}_\mu)\setminus\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu),$$

т.е. $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu)\subset\Sigma_\mu$. В итоге мы доказали, что $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu)=\Sigma_\mu$.

В силу леммы 2.3.2 при каждом $k\in\mathbb{T}^3$ обобщенная модель Фридрихса $\mathcal{A}_{\mu/\sqrt{2}}(k)$ имеет не более двух простых собственных значений, лежащих вне существенного спектра этого оператора. Тогда в силу теоремы о спектре разложимых операторов [38] из определения множества Λ_μ вытекает, что оно состоит из объединения не более чем двух отрезков. Следовательно, множество Σ_μ состоит из объединения не более чем трех отрезков. Теорема 3.2.1 полностью доказана.

Далее мы вводим подмножества существенного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$.

Определение 3.2.1. *Множества* Λ_μ *и* $[0;18]$ *называются “двухчастичной” и “трехчастичной” ветвями существенного спектра операторной матрицы* $\mathcal{A}_\mu$, *соответственно.*

Определение множества Λ_μ и равенство

$$\bigcup_{k\in\mathbb{T}^3}[m(k);M(k)]=[0;18]$$

вместе с теоремой 3.2.1 дают равенство

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu)=\bigcup_{k\in\mathbb{T}^3}\sigma(\mathcal{A}_{\mu/\sqrt{2}}(k)). \tag{3.2.3}$$

Здесь семейство обобщенных моделей Фридрихса $\mathcal{A}_{\mu/\sqrt{2}}(k)$ имеет более простую структуру, чем операторная матрица $\mathcal{A}_\mu$. Следовательно, в следующих исследованиях существенного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$ разложение (3.2.3) играет важную роль.

При каждом $z\in\mathbb{C}\setminus\Sigma_\mu$ ядро интегрального оператора $T_\mu(z)$ является непрерывной функцией на $(\mathbb{T}^3)^2$. Поэтому определитель Фредгольма $\Omega_\mu(z)$ оператора $I_1-T_\mu(z)$, здесь I_1 единичный оператор в H_1, существует и является аналитической функцией на $\mathbb{C}\setminus\Sigma_\mu$.

В силу леммы 3.1.1 и теоремы Фредгольма имеем, что число $z\in\mathbb{C}\setminus\Sigma_\mu$ является собственным значением операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$ тогда и только тогда, когда $\Omega_\mu(z)=0$, т.е.

$$\sigma_{disc}(\mathcal{A}_\mu)=\{z\in\mathbb{C}\setminus\Sigma_\mu:\Omega_\mu(z)=0\}.$$

Пусть $\mu_l^0(\gamma):=\sqrt{2}\hat{\mu}_l^0(\gamma)$ и $\mu_r^0(\gamma):=\sqrt{2}\hat{\mu}_r^0(\gamma)$.

Введем следующие обозначения:

$$E_\mu^{(1)}:=\min\{\Lambda_\mu\cap(-\infty;0]\};\qquad E_\mu^{(2)}:=\max\{\Lambda_\mu\cap(-\infty;0]\};$$

$$E_\mu^{(3)}:=\min\{\Lambda_\mu\cap[18;+\infty)\};\qquad E_\mu^{(4)}:=\max\{\Lambda_\mu\cap[18;+\infty)\}$$

Приводимое ниже утверждение дает полную информацию о верхней границе существенного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$, относительно параметра взаимодействия $\mu>0$.

Утверждение 3.2.1. 1) *Если* $\gamma < 12$*, справедливы следующие утверждения:*

1.1) *для любого* $\mu \in (0;\mu_r^0(\gamma)]$ *имеет место равенство* $\tau_{\max}(\mathcal{A}_\mu) = 18$;

1.2) *если* $\mu > \mu_r^0(\gamma)$, *то* $\tau_{\max}(\mathcal{A}_\mu) = E_\mu^{(4)}$ *и* $E_\mu^{(4)} > 18$.

2) *Если* $\gamma \geq 12$*, то для любого* $\mu > 0$ *имеет место равенство* $\tau_{\max}(\mathcal{A}_\mu) = E_\mu^{(4)}$ *и* $E_\mu^{(4)} > 18$.

Доказательство. 1) Пусть $\gamma < 12$. Очевидно, что $\lim\limits_{z\to+\infty} \Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k;z) = -\infty$ для каждого $k \in \mathbb{T}^3$.

Допустим $0 < \mu \leq \mu_r^0(\gamma)$. Тогда для всех $k \in \mathbb{T}^3$ и $z > 18$ имеет место неравенство $\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k;z) < 0$. Так как $\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k;\cdot)$ монотонно убывающая функция на полуоси $(18;+\infty)$ и для любого $k \in \mathbb{T}^3$ верно $\lim\limits_{z\to+\infty} \Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k;z) = -\infty$, она не имеет нулей, больших 18. Поэтому в силу леммы 2.1.2 при каждом $k \in \mathbb{T}^3$ оператор $\mathcal{A}_{\mu/\sqrt{2}}(k)$ не имеет собственных значений в промежутке $(18;+\infty)$. Учитывая теорему 3.2.1 получим $\tau_{\max}(\mathcal{A}_\mu) = 18$.

Теперь рассмотрим случай $\mu > \mu_r^0(\gamma)$. Тогда из теоремы 2.2.2 следует, что оператор $\mathcal{A}_{\mu/\sqrt{2}}(\overline{\pi})$ имеет единственное собственное значение, лежащее в $(18;+\infty)$. Это и означает, что $\Lambda_\mu \cap (18;+\infty) \neq \varnothing$. В силу теоремы 3.2.1 имеем $\tau_{\max}(\mathcal{A}_\mu) = E_\mu^{(4)}$ и $E_\mu^{(4)} > 18$.

2) Если $\gamma \geq 12$ то согласно теореме 2.2.2 для любого $\mu > 0$ оператор $\mathcal{A}_{\mu/\sqrt{2}}(\overline{\pi})$ имеет единственное собственное значение, больше 18. Теперь россуждая как выше, получим $\tau_{\max}(\mathcal{A}_\mu) = E_\mu^{(4)}$ и $E_\mu^{(4)} > 18$.

Для нижней границы существенного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$ сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 3.2.2. 1) *Если* $\gamma \leq 0$, *то для любого* $\mu > 0$ *имеет место равенство* $\tau_{\min}(\mathcal{A}_\mu) = E_\mu^{(1)}$ *и* $E_\mu^{(1)} < 0$.

2) *Пусть* $\gamma > 0$.

2.1) *Если* $\mu \in (0;\mu_l^0(\gamma)]$, *то имеем* $\tau_{\min}(\mathcal{A}_\mu) = 0$;

2.2) *если* $\mu > \mu_l^0(\gamma)$, *то имеет место равенство* $\tau_{\min}(\mathcal{A}_\mu) = E_\mu^{(1)}$ и $E_\mu^{(1)} < 0$.

Утверждение 3.2.5 доказывается анологично утверждению 3.2.4.

Структура существенного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$.

Из непрерывности функции $\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(\cdot;0)$ и $\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(\cdot;18)$ на компактном множестве $\mathbb{T}^3$ следует, что существуют точки $k_0, k_1 \in \mathbb{T}^3$ такие, что верны следующие равенства

$$\max_{k\in\mathbb{T}^3} \Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k;0) = \Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k_0;0), \qquad \min_{k\in\mathbb{T}^3} \Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k;18) = \Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k_1;18).$$

Введем обозначения:

$$\gamma_0 := \left(12\frac{I(k_0;0)}{I(\bar{0};0)} - \varepsilon(k_0)\right)\left(1 + \frac{I(k_0;0)}{I(\bar{0};0)}\right)^{-1};$$

$$\gamma_1 := \left(18 - \varepsilon(k_1)\right)\left(1 - \frac{I(k_1;18)}{I(\bar{0};0)}\right)^{-1}.$$

Приводимая ниже теорема описывает структуру существенного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$, в зависимости от значения параметров $\mu > 0$ и $\gamma \in \mathbb{R}$.

Теорема 3.2.2. *Пусть* $\mu = \mu_r^0(\gamma)$ *при* $\gamma < 12$. *Тогда для существенного спектра операторной матрицы* $\mathcal{A}_\mu$ *имеет место следующее соотношение:*

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu) = \begin{cases} [E_\mu^{(1)}; E_\mu^{(2)}] \cup [0;18], & \text{если } \gamma < \gamma_0; \\ [E_\mu^{(1)};18], & \text{если } \gamma_0 \le \gamma < 6; \\ [0;18], & \text{если } 6 \le \gamma < 12. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\mu = \mu_r^0(\gamma)$ при $\gamma < 12$. Можно легко проверить, что $\lim\limits_{z\to+\infty} \Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k;z) = -\infty$ и $\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k;18) \le 0$ для любого

$k \in \mathbb{T}^3$, т.е. функция $\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k;\cdot)$ не имеет нулей в промежутке $(18;+\infty)$. Тогда из леммы 2.1.2 следует, что для любого $k \in \mathbb{T}^3$ обобщенная модель Фридрихса $\mathcal{A}_{\mu/\sqrt{2}}(k)$ не имеет собственных значений, больших чем 18.

Напомним, что для любого $k \in \mathbb{T}^3$ функция $\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k;\cdot)$ строго монотонно убывает на интервале $(-\infty;0)$ и имеет место равенство $\lim\limits_{z \to -\infty} \Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k;z) = +\infty.$

Сначала рассмотрим случай $\gamma < \gamma_0$. Тогда ясно, что $\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k;0) < 0$ для любого $k \in \mathbb{T}^3$.

Поскольку, для любого $k \in \mathbb{T}^3$ функция $\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k;\cdot)$ непрерывна на промежутке $(-\infty;0)$, существует точка $z_\mu(k) \in (-\infty;0)$ такая, что $\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k;z_\mu(k)) = 0.$ В силу леммы 2.1.2 число $z_\mu(k)$ является собственным значением обобщенной модели Фридрихса $\mathcal{A}_{\mu/\sqrt{2}}(k)$. Так как функция $\varepsilon(\cdot)$ непрерывно, следовательно функции $w_0(\cdot)$ и $w_1(\cdot,\cdot)$ являются непрерывными в своих областях определения. Функция $z_\mu(\cdot)$, сопоставляющая элементу $k \in \mathbb{T}^3$ собственное значение $z_\mu(k)$, также непрерывна на $\mathbb{T}^3$. Поэтому множество $\operatorname{Im} z_\mu(\cdot)$ значений функции $z_\mu(\cdot)$ есть замкнутое подмножество множества $(-\infty;0)$, т.е.,

$$\operatorname{Im} z_\mu(\cdot) = [E_\mu^{(1)}; E_\mu^{(2)}],$$

причем $E_\mu^{(2)} < 0.$

Из теоремы 3.2.1 заключаем, что имеет место равенство

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu) = [E_\mu^{(1)}; E_\mu^{(2)}] \cup [0;18]$$

с условием $E_\mu^{(2)} < 0$.

Пусть теперь $\gamma_0 \le \gamma < 6.$ Простые вычисления показывают, что $\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(\bar{0};0) < 0$ и $\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k_0;0) > 0.$

Положим

$$G_\mu :\equiv \{k \in \mathbb{T}^3 : \Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k;0) < 0\}.$$

Так как $\mathbb{T}^3$ − компактное множество и $\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(\cdot;0)$ − непрерывная функция на $\mathbb{T}^3$, отсюда следует, что множество $G_\mu \subset \mathbb{T}^3$ − открытое множество. Так как $\bar{0} \in G_\mu$, множество G_μ − непустое. А из условия $\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k_0;0) > 0$ вытекает, что $k_0 \notin G_\mu$, что означает $G_\mu \neq \mathbb{T}^3$.

Для любого $k \in \mathbb{T}^3$ функция $\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k;\cdot)$ непрерывна и монотонно убывает на полуоси $(-\infty;0)$ и $\lim\limits_{z\to-\infty} \Delta_\mu(k;z) = +\infty$.

Поэтому для любого $k \in G_\mu$ существует единственное число $z_\mu(k) \in (-\infty;0)$ такое, что $\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k;z_\mu(k)) = 0$. В силу леммы 2.1.2 для любого $k \in G_\mu$ число $z_\mu(k) < 0$ является единственным собственным значением обобщенной модели Фридрихса $\mathcal{A}_{\mu/\sqrt{2}}(k)$. В силу аналитичности функции $\varepsilon(\cdot)$ отображение $z_\mu : k \in G_\mu \to z_\mu(k)$ является непрерывным отображением на G_μ.

Для любого $k \in \mathbb{T}^3$ обобщенная модель Фридрихса $\mathcal{A}_{\mu/\sqrt{2}}(k)$ ограничена и $\mathbb{T}^3$ − компактное множество, поэтому существует положительное число C_μ такое, что $\sup\limits_{k\in\mathbb{T}^3} \| \mathcal{A}_{\mu/\sqrt{2}}(k) \| \leq C_\mu$, следовательно, для любого $k \in \mathbb{T}^3$ имеем

$$\sigma(\mathcal{A}_{\mu/\sqrt{2}}(k)) \subset \left[-C_\mu; C_\mu\right]. \qquad (3.2.4)$$

Для любого

$$p \in \partial G_\mu = \{k \in \mathbb{T}^3 : \Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k;0) = 0\}$$

существует последовательность $\{k_n\} \subset G_\mu$ такая, что $k_n \to p$ при $n \to \infty$. Положим $z_\mu^{(n)} := z_\mu(k_n)$. Тогда $z_\mu(k_n) < 0$ для любого $k_n \in G_\mu$. Используя включение (3.2.4), получим, что $\{z_\mu^{(n)}\} \subset [-C;0]$. Тогда существует подпоследовательность $\{z_\mu^{(n_m)}\} \subset \{z_\mu^{(n)}\}$ такая, что

$$z_\mu^{(n_m)} \to z_\mu^{(0)} \qquad (z_\mu^{(n_m)} = z_\mu(k_{n_m}), k_{n_m} \in \{k_n\})$$

при $m \to \infty$ для некоторого $z_\mu^{(0)} \in [-C_\mu; 0]$. Из непрерывности функции $\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(\cdot;\cdot)$ на $\mathbb{T}^3 \times (-\infty; 0]$ и соотношений $k_{n_m} \to p$ и $z_\mu^{(n_m)} \to z_\mu^{(0)}$ при $m \to \infty$ следует, что

$$0 = \lim_{m\to\infty} \Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k_{n_m}; z_\mu^{(n_m)}) = \Delta_{\mu/\sqrt{2}}(p; z_\mu^{(0)}).$$

Так как для любого $k \in \mathbb{T}^3$ функция $\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k;\cdot)$ монотонно убывает на $(-\infty; 0]$ и $p \in \partial G_\mu$, отсюда мы получаем, что $\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(p; z_\mu^{(0)}) = 0$ тогда и только тогда, когда $z_\mu^{(0)} = 0$.

Для любого $p \in \partial G_\mu$ определим $z_\mu(p) := \lim\limits_{k \to p,\, p \in \partial G_\mu} z_\mu(k) = 0$.

Так как функция $z_\mu(\cdot)$ непрерывна на компактном множестве $G_\mu \cup \partial G_\mu$ и $z_\mu(p) = 0$ при всех $p \in \partial G_\mu$, множество $\operatorname{Im} z_\mu(\cdot)$ значений функции $z_\mu(\cdot)$ есть отрезок $[E_\mu^{(1)}; 0]$, т.е.

$$\operatorname{Im} z_\mu(\cdot) = [E_\mu^{(1)}; 0], \qquad E_\mu^{(1)} < 0.$$

Следовательно, множество $\{\lambda \in \Lambda_\mu : \lambda \le 0\}$ совпадает с отрезком $[E_\mu^{(1)}; 0]$. Таким образом, в силу теоремы 3.2.1 получаем $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu) := [E_\mu^{(1)}; 18]$.

Пусть $6 \le \gamma < 12$. В этом случае для любого $k \in \mathbb{T}^3$ имеют место следующие соотношения $\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k; 0) \ge 0$ и $\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k; 18) \le 0$. Тогда в силу леммы 2.1.2 при каждом $k \in \mathbb{T}^3$ обобщенная модель Фридрихса $\mathcal{A}_{\mu/\sqrt{2}}(k)$ не имеет собственных значений на $(-\infty; 0) \cup (18; +\infty)$, т.е. $\Lambda_\mu \setminus [0; 18] = \varnothing$. Тогда согласно теореме 3.2.1 получим $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu) = [0; 18]$.

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 3.2.2.

Теорема 3.2.3. *Пусть* $\mu = \mu_l^0(\gamma)$ *при* $\gamma > 0$. *Имеет место следующее соотношение*

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu)=\begin{cases}[0;18], & если \;\; 0<\gamma\le 6;\\ [0;E_\mu^{(4)}], & если \;\; 6<\gamma\le\gamma_1;\\ [0;18]\cup[E_\mu^{(3)};E_\mu^{(4)}], & если \;\; \gamma>\gamma_1.\end{cases}$$

§3.3. Анализ дискретного спектра одной $2\times 2-$ операторной матрицы. Асимптотика дискретного спектра

Этот параграф состоит из двух частей. В первой части найдены условия, гарантирующие конечность числа собственных значений операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$, лежащих левее $E_\mu^{(1)}$ и правее $E_\mu^{(4)}$. Во второй части данного параграфа доказывается бесконечность числа собственных значений операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$, накапливающихся к нижней и верхней граням существенного спектра. Более того, получена асимптотика для числа собственных значений, лежащих левее $z, z\le 0$, и правее $z, z\ge 18$, операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$, по спектральному параметру $z\nearrow 0$ и $z\searrow 18$, соответственно.

Конечность дискретного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$. Обозначим через C_1, C_2, C_3 различные положительные числа. При каждом $\delta>0$ введем следующее множество

$$U_\delta(k_0):=\left\{k\in\mathbb{T}^3: \left|k-k_0\right|<\delta\right\},$$

δ-окрестность точки $k_0\in\mathbb{T}^3$.

Лемма 3.3.1. *Существуют положительные числа C_1, C_2, C_3 и $\delta>0$ такие, что имеют место следующие неравенства:*

1) $C_1(|k|^2+|p|^2)\le w_1(k,p)\le C_2(|k|^2+|p|^2)$ *для любых* $k,p\in U_\delta(\bar{0})$;

2) $w_1(k,p)\ge C_3$ *для любых* $(k,p)\notin U_\delta(\bar{0})\times U_\delta(\bar{0})$;

3) $C_1(|k-\bar{\pi}|^2+|p-\bar{\pi}|^2)\le 18-w_1(k,p)\le C_2(|k-\bar{\pi}|^2+|p-\bar{\pi}|^2)$ *для любых* $k,p\in U_\delta(\bar{\pi})$;

4) $18 - w_1(k,p) \geq C_3$ *для любых* $(k,p) \notin U_\delta(\overline{\pi}) \times U_\delta(\overline{\pi})$.

Доказательство. Из определения функции $w_1(\cdot,\cdot)$ получим асимптотические разложения

$$w_1(k,p) = \frac{5}{8}|k|^2 + \frac{1}{4}(k,p) + \frac{5}{8}|p|^2 + O(|k|^4) + O(|p|^4), \quad |k|,|p| \to 0$$

и

$$w_1(k,p) = 18 - \left(\frac{5}{8}|k-\overline{\pi}|^2 + \frac{1}{4}(k-\overline{\pi}, p-\overline{\pi}) + \frac{5}{8}|p-\overline{\pi}|^2\right) +$$
$$+ O(|k-\overline{\pi}|^4) + O(|p-\overline{\pi}|^4), \; |k-\overline{\pi}|,|p-\overline{\pi}| \to 0.$$

Тогда существуют числа $C_1, C_2, C_3 > 0$ и δ–окрестность точек $\overline{0} \in \mathbb{T}^3$ и $\overline{\pi} \in \mathbb{T}^3$ такие, что выполняются неравенства 1)–4).

Из определения функции $\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(\cdot;\cdot)$ следует, что для любого $\mu > \mu_r^0(\gamma)$ с условием $\gamma < 12$ функция $\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(\cdot, E_\mu^{(4)})$ является аналитической функцией на компактном множестве $\mathbb{T}^3$. Тогда $\{k \in \mathbb{T}^3 : \Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k, E_\mu^{(4)}) = 0\}$ есть конечное множество.

Для определенности положим

$$\{k \in \mathbb{T}^3 : \Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k, E_\mu^{(4)}) = 0\} = \{k_1, k_2, \ldots, k_N\}, \; N < \infty.$$

Следующая лемма доказывается как лемма 10 из [47].

Лемма 3.3.2. *Пусть* $i \in \{1,2,\ldots,N\}$ *и* $\mu > \mu_r^0(\gamma)$ *с условием* $\gamma < 12$. *Тогда существуют положительные числа* C_1, C_2, C_3 *и* $\delta > 0$ *такие, что имеют место следующие соотношения:*

$$C_1 |k-k_i|^2 \leq |\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k; E_\mu^{(4)})| \leq C_2 |k-k_i|^2, \quad k \in U_\delta(k_i).$$

Теперь исследуем некоторые свойства оператора $\hat{T}_\mu(E_\mu^{(4)})$.

Лемма 3.3.3. *Пусть* $\gamma \geq 12$ *и* μ–*произвольное положительное число или* $\mu \neq \mu_r^0(\gamma)$ *для любого* $\gamma < 12$. *Тогда оператор* $\hat{T}_\mu(z)$ *компактен и непрерывен в сильной операторной топологии в точке* $z = E_\mu^{(4)}$.

Доказательство. Пусть $\mu \in (0; \mu_r^0(\gamma))$ для любого $\gamma < 12$. Тогда в силу утверждения 3.2.1 получаем, что $E_\mu^{(4)} = 18$.

Поскольку функция $\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(\cdot;18)$ положительна и непрерывна на компактном множестве $\mathbb{T}^3$, существуют положительные числа C_1 и C_2 такие, что

$$C_1 \le \Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k;18) \le C_2, \quad k \in \mathbb{T}^3.$$

С учетом утверждений 1) и 4) леммы 3.3.1 имеют место следующие соотношения

$$\int_{(\mathbb{T}^3)^2} \frac{dkdp}{\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k;18)\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(p;18)(w_1(k;p)-18)^2} \le$$

$$\le C_1 \int_{(U_\delta(\bar{\pi}))^2} \frac{dkdp}{(|k-\bar{\pi}|^2+|p-\bar{\pi}|^2)^2} + C_2 = C_1 \int_{(U_\delta(\bar{0}))^2} \frac{dkdp}{(k^2+p^2)^2} + C_2.$$

Переходя к сферической системе координат, затем к полярной системе координат в последнем интеграле имеем

$$C_1 \int_{(U_\delta(\bar{0}))^2} \frac{dkdp}{(k^2+p^2)^2} \le C_1 \int_0^\delta\int_0^\delta \frac{r_1^2 r_2^2 dr_1 dr_2}{(r_1^2+r_2^2)^2} \le C_1 \int_0^{\pi/2} \sin^2(2\varphi)d\varphi \int_0^{2\delta} \frac{r^5}{r^4}dr < C_1.$$

Пусть теперь $\gamma \ge 12$ и $\mu > 0$ или $\mu > \mu_r^0(\gamma)$ для любого $\gamma < 12$. Тогда из утверждения 3.2.1 имеем $E_\mu^{(4)} > 18$. В силу непрерывности функции $w_1(\cdot;\cdot)$ на компактном множестве $(\mathbb{T}^3)^2$ и неравенства $w_1(k,p) - E_\mu^{(4)} < 0$ для всех $k,p \in \mathbb{T}^3$, следует, что существуют положительные числа C_1 и C_2 такие, что имеет место оценка

$$C_1 \le \frac{1}{|w_1(k,p) - E_\mu^{(4)}|} \le C_2, \quad k,p \in \mathbb{T}^3. \qquad (3.3.1)$$

Учитывая соотношение (3.3.1) и лемму 3.3.2 для ядра интегрального оператора $\hat{T}_\mu(E_\mu^{(4)})$ имеем

$$\int_{(\mathbb{T}^3)^2} \frac{dkdp}{\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k;E_\mu^{(4)})\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(p;E_\mu^{(4)})(w_1(k,p)-E_\mu^{(4)})^2} \le$$

$$\le C_1 \sum_{i,j=1}^N \int_{U_\delta(k_i)} \frac{dk}{\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k;E_\mu^{(4)})} \int_{U_\delta(k_j)} \frac{dk}{\Delta_{\mu/\sqrt{2}}(k;E_\mu^{(4)})} + C_2 \le$$

$$\le C_1 \sum_{i,j=1}^N \int_{U_\delta(k_i)} \frac{dk}{|k-k_i|^2} \int_{U_\delta(k_j)} \frac{dk}{|k-k_j|^2} + C_2 = C_1 N^2 \left(\int_{U_\delta(\bar{0})} \frac{dk}{k^2} \right)^2 + C_2.$$

Переходя в последнем интеграле к сферической системе координат имеем

$$\int_{U_\delta(\bar{0})} \frac{dk}{k^2} \le C_1 \int_0^\delta \frac{r_1^2 dr_1}{r_1^2} \le C_1.$$

Следовательно, для всех $\gamma \ge 12$ и $\mu > 0$ или $\mu \ne \mu_r^0(\gamma)$ для любого $\gamma < 12$ ядро интегрального оператора $\hat{T}_\mu(z), z \ge E_\mu^{(4)}$ квадратично-интегрируемо на $(\mathbb{T}^3)^2$. Таким образом, оператор $\hat{T}_\mu(z)$, $z \ge E_\mu^{(4)}$, является оператором Гильберта - Шмидта.

Ясно, что ядро этого интегрального оператора непрерывно по $k, p \in \mathbb{T}^3$ при $z > E_\mu^{(4)}$ и квадратично-интегрируемо при $z \ge E_\mu^{(4)}$. Тогда в силу теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега оператор $\hat{T}_\mu(z)$ компактен и непрерывен в сильной операторной топологии в точке $z = E_\mu^{(4)}$.

Теперь сформулируем результат о конечности дискретного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$.

Теорема 3.3.1. 1) *Пусть либо* $\gamma \ge 12$ *и* $\mu > 0$, *либо* $\mu \ne \mu_r^0(\gamma)$ *для любого* $\gamma < 12$. *Тогда операторная матрица* $\mathcal{A}_\mu$ *имеет конечное число собственных значений, лежащих правее* $E_\mu^{(4)}$.

2) *Пусть либо* $\gamma \le 0$ *и* $\mu > 0$, *либо* $\mu \ne \mu_l^0(\gamma)$ *для любого* $\gamma > 0$. *Тогда операторная матрица* $\mathcal{A}_\mu$ *имеет конечное число собственных значений, лежащих левее* $E_\mu^{(1)}$.

Доказательство. 1) Предположим, что $\gamma \ge 12$ и $\mu > 0$ или $\mu \ne \mu_r^0(\gamma)$ для любого $\gamma < 12$. В силу леммы 3.1.2 имеем

$$N_{(z;+\infty)}(\mathcal{A}_\mu) = n(1; \hat{T}_\mu(z)) \qquad \text{при} \qquad z > E_\mu^{(4)},$$

и ввиду леммы 3.3.3 для любого $a \in [0;1)$ величина $n(1-a; \hat{T}_\mu(E_\mu^{(4)}))$ конечна.

Используя неравенство Вейля

$$n(\lambda_1 + \lambda_2; A_1 + A_2) \le n(\lambda_1; A_1) + n(\lambda_2; A_2)$$

для суммы компактных операторов A_1 и A_2, при любых положительных числах λ_1 и λ_2, имеем

$$N_{(z;+\infty)}(\mathcal{A}_\mu) = n(1;\hat{T}_\mu(z)) \le n(1-a;\hat{T}_\mu(E_\mu^{(4)})) + n(a;\hat{T}_\mu(z) - \hat{T}_\mu(E_\mu^{(4)}))$$

для любых $z > E_\mu^{(4)}$ и $a \in (0;1)$.

В силу леммы 3.3.3 оператор $\hat{T}_\mu(z)$ компактен и непрерывен в сильной операторной топологии в точке $z = E_\mu^{(4)}$ и имеет место соотношение

$$\lim_{z \to E_\mu^{(4)}+0} N_{(z;+\infty)}(\mathcal{A}_\mu) \le N_{(E_\mu^{(4)};+\infty)}(\mathcal{A}_\mu) \le n(1-a;\hat{T}_\mu(E_\mu^{(4)}))$$

для любого $a \in (0;1)$. Следовательно,

$$N_{(E_\mu^{(4)};+\infty)}(\mathcal{A}_\mu) \le n(1-a;\hat{T}_\mu(E_\mu^{(4)})) < \infty.$$

Последнее неравенство завершает доказательство утверждения 1) теоремы 3.3.1

Доказательство утверждения 2) теоремы 3.3.1 аналогично.

«Двусторонний эффект Ефимова» для $\mathcal{A}_\mu$ и асимптотика дискретного спектра. В этом разделе докажем существование «двухстороннего эффекта Ефимова» для операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$. Выведем асимптотическое соотношение для числа собственных значений операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$ в промежутке $(-\infty;0)$ и $(18;+\infty)$, соответственно.

Далее, мы тесно следуем методу Соболева [13], чтобы получить асимптотику для числа собственных значений операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$, лежащих левее $z, z<0$ при $\mu = \mu_l^0(\gamma), \gamma < 0$ и правее $z, z > 18$ при $\mu = \mu_r^0(\gamma), \gamma > 12$.

Пусть $\mathbb{S}^2$ - единичная сфера в пространстве $\mathbb{R}^3$ и

$$S_r : L_2((0,r),\sigma_0) \to L_2((0,r),\sigma_0), \quad r > 0, \quad \sigma_0 = L_2(\mathbb{S}^2)$$

интегральный оператор с ядром

$$S(t;y) := \frac{25}{8\pi^2\sqrt{6}} \frac{1}{5ch(y)+t}, \;\; y = x - x', \quad x, x' \in (0,r), \quad t = (\xi,\eta), \quad \xi,\eta \in \mathbb{S}^2.$$

Для $\lambda > 0$, определим $U(\lambda) = \frac{1}{2}\lim\limits_{r\to\infty} r^{-1} n(\lambda, S_r)$.

Существование последнего предела и доказательство факта $U(1) > 0$ изложены в работе [13].

Для полноты приведем следующую лемму, доказанную в работе [13].

Лемма 3.3.4. *Пусть задан оператор вида* $A(z) = A_0(z) + A_1(z)$, *где* $A_0(z)$ (*соответственно* $A_1(z)$) *является компактным и непрерывным при* $z > 18$ (*соответственно при* $z \geq 18$) *в сильной операторной топологии. Предположим, что для функции* $f(\cdot)$, $f(z) \to 0$, $z \searrow 18$, *имеет место равенство*

$$\lim_{z\searrow 18} f(z) n(\zeta, A_0(z)) = l(\zeta),$$

где функция $l(\cdot)$ *определена и непрерывна на* $(0;+\infty)$. *Тогда аналогичный предел существует для* $A(z)$ *и имеет место*

$$\lim_{z\searrow 18} f(z)\, n(\zeta, A(z)) = l(\zeta).$$

Теорема 3.3.2. 1) *При* $\mu = \mu_r^{(0)}(\gamma)$ *с условием* $\gamma < 12$ *операторная матрица* $\mathcal{A}_\mu$ *имеет бесконечное число собственных значений в промежутке* $(18;+\infty)$ *и накапливающихся к* $E_\mu^{(4)} = 18$. *Кроме того,*

$$\lim_{z\searrow 18} \frac{N_{(z;+\infty)}(\mathcal{A}_{\mu_r^0(\gamma)})}{|\ln|z-18||} = U(1). \tag{3.3.2}$$

2) *При* $\mu = \mu_l^{(0)}(\gamma)$ *с условием* $\gamma > 0$ *операторная матрица* $\mathcal{A}_\mu$ *имеет бесконечное число собственных значений в промежутке* $(-\infty;0)$ *и накапливающихся к* $E_\mu^{(1)} = 0$. *Кроме того,*

$$\lim_{z\nearrow 0} \frac{N_{(-\infty;z)}(\mathcal{A}_{\mu_l^0(\gamma)})}{|\ln|z||} = U(1).$$

Доказательство. 1) Видно, что в силу равенства (3.3.2) бесконечность частей дискретного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_{\mu_r^0(\gamma)}$, расположенных в $(18;+\infty)$, автоматически вытекает из положительности числа $U(1)$. Поэтому выводим асимптотику

(3.3.2) для числа собственных значений операторной матрицы $\mathcal{A}_{\mu_r^0(\gamma)}$, больших 18. Сначала найдем асимптотическое выражение для $n(1,\hat{T}_{\mu_r^0(\gamma)}(z))$ при $z\searrow 18.$ Изучение спектральных свойств интегрального оператора $\hat{T}_{\mu_r^0(\gamma)}(z)$ сводится к изучению спектральных свойств интегрального оператора $\hat{T}^{(1)}(r)$, которое рассмотрено в работе [8].

Пусть $\hat{T}(\delta;|z-18|):L_2(\mathbb{T}^3)\to L_2(\mathbb{T}^3)-$ интегральный оператор с ядром

$$\frac{5\sqrt{5}}{8\pi^2}\ \frac{\chi_\delta(p-\bar{\pi})\chi_\delta(q-\bar{\pi})(\frac{6}{5}|p-\bar{\pi}|^2+2|z-18|)^{-1/4}(\frac{6}{5}|q-\bar{\pi}|^2+2|z-18|)^{-1/4}}{5|p-\bar{\pi}|^2+2(p-\bar{\pi},q-\bar{\pi})+5|q-\bar{\pi}|^2+8|z-18|},$$

где $\chi_\delta(\cdot)$–характеристическая функция множества $U_\delta(\bar{0})$. Используя лемму 2.2.2 и лемму 3.3.1, можно легко установить, что для любого $z\geq 18$ и при малых $\delta>0$ разность $\hat{T}_{\mu_r^0(\gamma)}(z)-\hat{T}(\delta;|z-18|)$ является оператором Гильберта-Шмидта и она непрерывна в сильной операторной топологии в точке $z=18.$

Из определения ядра интегрального оператора $\hat{T}(\delta;|z-18|)$ следует, что подпространство всех функций f, носители которых лежат в $U_\delta(\bar{\pi}),$ является инвариантным подпространством оператора $\hat{T}(\delta;|z-18|).$ Пусть $\hat{T}^{(0)}(\delta;|z-18|)-$сужение оператора $\hat{T}(\delta;|z-18|)$ на подпространство $U_\delta(\bar{\pi}),$ т.е. интегральный оператор, действующий в $L_2(U_\delta(\bar{\pi})),$ с ядром

$$\frac{5\sqrt{5}}{8\pi^2}\ \frac{(\frac{6}{5}|p-\bar{\pi}|^2+2|z-18|)^{-1/4}(\frac{6}{5}|q-\bar{\pi}|^2+2|z-18|)^{-1/4}}{5|p-\bar{\pi}|^2+2(p-\bar{\pi},q-\bar{\pi})+5|q-\bar{\pi}|^2+8|z-18|}.$$

С помощью унитарного оператора

$$B_r:L_2(U_\delta(\bar{\pi}))\to L_2(U_r(\bar{0})),\quad (B_rf)(p)=r^{-\frac{3}{2}}f(\frac{\delta}{r}(p-\bar{\pi})),$$

легко показать, что оператор $\hat{T}^{(0)}(\delta;|z-18|)$ унитарно эквивалентен интегральному оператору $\hat{T}^{(1)}(r), r=|z-18|^{-1/2}$, действующему в $L_2(U_r(\bar{0}))$, с ядром

$$\frac{5\sqrt{5}}{8\pi^2}\ \frac{(\frac{6}{5}p^2+2)^{-1/4}(\frac{6}{5}q^2+2)^{-1/4}}{5p^2+2(p,q)+5q^2+8}.$$

Так как функция $U(\cdot)$ является непрерывной относительно μ, из леммы 3.3.4 следует, что любое возмущение $A_1(z)$ оператора $A(z)$, рассматриваемое в лемме 3.3.4 (которое является компактным и непрерывным при $z \geq 18$ в сильной операторной топологии) не меняет асимптотическое соотношение (3.3.2).

В работе [8] доказано, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(1,\hat{T}^{(1)}(r))}{|\ln r|}=U(1).$$

Теперь доказательство утверждения 1) теоремы 3.3.2 вытекает из лемм 3.1.2, 3.3.4.

Аналогичном образом оператор $\hat{T}_{\mu_r^0(\gamma)}(z), z<0$, сводится к оператору $\hat{T}^{(1)}(r)$ с $r=|z|^{-1/2}$. Утверждение 2) теоремы 3.3.2 доказано.

Из определения чисел $\mu_l^0(\gamma)$, $\mu_r^0(\gamma)$ и граничных точек $E^{(1)}_{\mu_l^0(\gamma)}$, $E^{(4)}_{\mu_r^0(\gamma)}$ следует, что $\mu_l^0(6)=\mu_r^0(6)=\mu_0$ и $E^{(1)}_{\mu_0}=0,\ E^{(4)}_{\mu_0}=18$. Учитывая эти факты получаем одно важное следствие теоремы 3.3.2.

Следствие 3.3.1. *Имеет место соотношение*

1) $N_{(-\infty;0)}(\mathcal{A}_{\mu_0})=\infty, \quad N_{(18;\infty)}(\mathcal{A}_{\mu_0})=\infty;$

2) $\lim\limits_{z\nearrow 0}\dfrac{N_{(-\infty;\,z)}(\mathcal{A}_{\mu_0})}{|\ln|z||}=\lim\limits_{z\searrow 18}\dfrac{N_{(z;\,\infty)}(\mathcal{A}_{\mu_0})}{|\ln|z-18||}=U(1).$

Решетчатые системы с несохраняющимся ограниченным числом частиц. Отметим, что в непрерывном пространстве и на решетке имеются в определенном смысле более интересные задачи, возникающие в задачах физики твердого тела [2], квантовой теории поля [48] и статистической физики [49], в которых число частиц не сохраняется. В то же время изучение таких решетчатых систем (в случае не более чем трех частиц) сводится к изучению спектральных свойств самосопряженных $3\times 3-$операторных матриц вида

$$\tilde{\mathcal{A}}_\mu := \begin{pmatrix} A_{00} & \mu A_{01} & \mu A_{02} \\ \mu A_{01}^* & A_{11} & \mu A_{12} \\ \mu A_{02}^* & \mu A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix},$$

действующих в гильбертовом пространстве $H_0 \oplus H_1 \oplus H_2$. Здесь матричные элементы $A_{ij}: H_j \to H_i$, $i \le j$, $i, j = 0,1,2$ определены следующим образом:

$$A_{00} f_0 = a f_0, \quad A_{01} f_1 = \int_{\mathbb{T}^3} v(t) f_1(t) dt, \quad A_{02} = 0; \quad (A_{11} f_1)(k) = w_0(k) f_1(k),$$

$$(A_{12} f_2)(k) = \int_{\mathbb{T}^3} v(t) f_2(k,t) dt; \ (A_{22} f_2)(k,p) = w_1(k,p) f_2(k,p), \ f_i \in H_i, i = 0,1,2.$$

При этом $a \in \mathbb{R}$; $\mu > 0-$параметр взаимодействия, $v(\cdot)$, $w_0(\cdot)-$ вещественнозначные непрерывные функции на $\mathbb{T}^3$ и $w_1(\cdot,\cdot)-$ вещественнозначная непрерывная симметричная функция на $(\mathbb{T}^3)^2$.

В современной математической физике операторы A_{01}, A_{12} называются операторами уничтожения, а A_{01}^*, A_{12}^*-операторами рождения. Оператор уничтожения снижает количество частиц в данном состоянии на единицу, а оператор рождения увеличивает число частиц в заданном состоянии на единицу и является сопряженным к оператору уничтожения. Такие операторы имеют широкое применение в квантовой механике, в частности, в изучении квантовых гармонических осцилляторов и систем многих частиц [50]. Подчеркнем, что в данном случае, число рождений и уничтожений равно единице, это означает, что $A_{ij} = 0$ при $|i-j|>1$. Следует заметить, что если параметр-функции операторной матрицы $\tilde{\mathcal{A}}_\mu$ определены как

$$a = \varepsilon s, \quad w_0(k) = -\varepsilon s + \omega(k), \quad w_1(k,p) = -\varepsilon s + \omega(k) + \omega(p),$$

то с помощью полученного оператора можно подробно исследовать спектральные свойства решетчатой модели светового излучения с неподвижным атомом и не более чем двумя фотонами [51, 52]. Здесь $s=\pm,\ \varepsilon>0,\ \omega(k)-$ энергия фотона с импульсом k (дисперсия свободного поля), а $v(\cdot)$–некоторая непрерывная функция (связанная с взаимодействием между атомом и фотонами).

Известно, что в импульсном представлении трехчастичный дискретный оператор Шредингера $\hat{\mathcal{A}}$ действует в гильбертовом пространстве $L_2((\mathbb{T}^3)^3)$. После выделения полного квазиимпульса системы $K\in\mathbb{T}^3$ оператор $\hat{\mathcal{A}}$ разлагается в прямой операторный интеграл (см., например, [7, 38, 39, 43])

$$\hat{\mathcal{A}}=\int\limits_{\mathbb{T}^3}\oplus\hat{\mathcal{A}}(K)dK,$$

где ограниченный самосопряженный оператор $\hat{\mathcal{A}}(K),\ K\in\mathbb{T}^3$, действует в гильбертовом пространстве $L_2(\varGamma_K)$ $(\varGamma_K\subset(\mathbb{T}^3)^2-$ некоторое многообразие).

Отметим, что операторная матрица $\tilde{\mathcal{A}}_\mu$ обладает основными спектральными свойствами трехчастичного дискретного оператора Шредингера $\hat{\mathcal{A}}(0)$, где роль двухчастичного дискретного оператора Шредингера играет обобщенная модель Фридрихса $\mathcal{A}_\mu(k)$ [7, 8]. По этой причине гильбертово пространство $H_0\oplus H_1\oplus H_2$ называется *трехчастичным обрезанным подпространством* бозонного пространства Фока $F_s(L_2(\mathbb{T}^3))$ над $L_2(\mathbb{T}^3)$, а операторная матрица $\tilde{\mathcal{A}}_\mu$ называется гамильтонианом системы с не более чем тремя частицами на решетке.

Часто приходится пользоваться матрицами, разбитыми на прямоугольные части – "клетки" или "блоки". Разобьем операторную матрицу $\tilde{\mathcal{A}}_\mu$ на прямоугольные блоки и представим ее в виде суммы двух операторных матриц:

$$\tilde{\mathcal{A}}_\mu = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{00} & \mu\mathcal{A}_{01} \\ \mu\mathcal{A}_{01}^* & \overline{\mathcal{A}} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_{11,\mu} \end{pmatrix}}_{=:\mathcal{A}_\mu^0} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{00} & \mu\mathcal{A}_{01} \\ \mu\mathcal{A}_{01}^* & 0 \end{pmatrix}}_{=:\mathcal{V}\mu}$$

с матричными элементами:

$$\mathcal{A}_{00} := A_{00}, \quad \mathcal{A}_{01} := (A_{01} \quad 0), \quad \overline{\mathcal{A}} := \begin{pmatrix} A_{11} & \mu A_{12} \\ \mu A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Из определения операторов $\tilde{\mathcal{A}}_\mu$ и $\overline{\mathcal{A}}$ видно, что если

$$v(k) \equiv 1, \quad w_0(k) = \varepsilon(k) + \gamma, \quad w_1(k,p) = \varepsilon(k) + \varepsilon(\frac{1}{2}(k+p)) + \varepsilon(p),$$

а функция дисперсии $\varepsilon(\cdot)$ имеет вид (2.1.2), то имеем, $\mathcal{A}_{11,\mu} \equiv \mathcal{A}_\mu$.

Так как операторы $\mathcal{A}_{00}$ и $\mathcal{A}_{01}$ являются одномерными, оператор $\mathcal{V}_\mu$ двумерный. Следовательно, в силу теоремы Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга существенный спектр операторной матрицы $\tilde{\mathcal{A}}_\mu$ совпадает с существенным спектром операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$.

Поскольку $rank\, V_\mu = 2,$ в силу леммы 1.2.1 получим, что при всех $z \in \rho(\tilde{\mathcal{A}}_\mu) \cap \rho(\mathcal{A}_\mu^0)$ для ранга разности резольвент справедливо равенство

$$rank\,((\tilde{\mathcal{A}}_\mu - zI)^{-1} - (\mathcal{A}_\mu^0 - zI)^{-1}) = 2,$$

где $I-$единичный оператор в $H_0 \oplus H_1 \oplus H_2$. Следовательно, операторы $\tilde{\mathcal{A}}_\mu$ и $\mathcal{A}_\mu^0$ удовлетворяют условиям теоремы 1.2.1. Тогда, учитывая равенство
$\sigma_{disc}(\mathcal{A}_\mu^0) = \{0\} \cup \sigma_{disc}(\mathcal{A}_\mu),$ имеем

$$\lim_{z \nearrow E_\mu^{(1)}} \frac{N_{(-\infty,\, z)}(\tilde{\mathcal{A}}_\mu)}{N_{(-\infty,\, z)}(\mathcal{A}_\mu)} = \lim_{z \searrow E_\mu^{(4)}} \frac{N_{(z,\, +\infty)}(\tilde{\mathcal{A}}_\mu)}{N_{(z,\, +\infty)}(\mathcal{A}_\mu)} = 1.$$

Теперь из следствия 3.3.1 следует, что $N_{(-\infty;0)}\tilde{\mathcal{A}}_{\mu_0} = N_{(18;\infty)}\tilde{\mathcal{A}}_{\mu_0} = \infty,$ где $\mu_0 := \mu_l^0(6)$.

Причем для числа собственных значений операторной матрицы $\tilde{\mathcal{A}}_{\mu_0}$ имеет место логарифмическая асимптотика следующего вида:

$$\lim_{z \nearrow 0} \frac{N_{(-\infty,\, z)}(\tilde{\mathcal{A}}_{\mu_0})}{|\ln|z||} = \lim_{z \searrow 18} \frac{N_{(z,\, \infty)}(\tilde{\mathcal{A}}_{\mu_0})}{|\ln|z-18||} = U(1).$$

Таким образом, полученные результаты в параграфах 1.2 и 3.3 играют важную роль при исследовании существенного и дискретного спектров операторов энергии системы с несохраняющимся ограниченным числом частиц на решетке (в случае не более чем трех частиц) и решетчатой модели «спин-бозон» с не более чем двумя фотонами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая монография посвящена изучению спектральных свойств двух классов самосопряженных неограниченных $2\times 2-$ операторных матриц, семейства обобщенных моделей Фридрихса $\mathcal{A}_\mu(k)$ и $2\times 2-$операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$, связанной с гамильтонианом системы с не более чем тремя частицами на трехмерной решетке $\mathbb{Z}^3$.

Основные результаты данной монографии следующие:

1) Для класса самосопряженных неограниченных $2\times 2-$ операторных матриц вида $\mathcal{A}=\mathcal{A}_0+\mathcal{V}$ доказано, что если разность резольвент операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_0$ имеет конечный ранг, и существенный спектр оператора $\mathcal{A}_0$ состоит из объединения конечного числа отрезков, то оператор $\mathcal{A}$ имеет бесконечное число собственных значений в лакуне существенного спектра тогда и только тогда, когда оператор $\mathcal{A}_0$ имеет бесконечное число собственных значений на этой лакуне;

2) Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы нижняя грань (верхняя грань) существенного спектра являлось виртуальным уровнем рассматриваемого оператора $\mathcal{A}_\mu(\bar{0})$ $(\mathcal{A}_\mu(\bar{\pi}))$;

3) Подробно исследована структура замыкания числовой области значений $W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)$ оператора $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ в терминах его матричных элементов при всех размерностях тора $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$. Выделены случаи, когда множество $W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)$ замкнуто.

Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы спектр оператора $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ совпадал с множеством $W(\hat{\mathcal{A}}_\mu)$;

4) Получены оценки для границы компонентов квадратичной числовой области значений оператора $\hat{\mathcal{A}}_\mu$;

5) Описаны местоположение и структура существенного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$ с помощью спектров обобщенной модели Фридрихса $\mathcal{A}_\mu(k)$;

6) Найдены критические значения $\mu_l^0(\gamma)$ и $\mu_r^0(\gamma)$ параметра взаимодействия μ, при которых оператор $\mathcal{A}_\mu, \mu \neq \mu_l^0(\gamma)$ $(\mu \neq \mu_r^0(\gamma))$ имеет конечное число собственных значений, лежащих левее (правее) существенного спектра;

7) При $\mu_l^0(\gamma)$ и $\mu_r^0(\gamma)$ доказана бесконечность числа собственных значений, лежащих левее (правее) существенного спектра;

8) В случае $\mu = \mu_0 := \mu_l^0(6)$ показано, что оператор $\mathcal{A}_\mu$ одновременно имеет бесконечное число собственных значений, накапливающихся к нижней (равной 0) и верхней (равной 18) граням существенного спектра. Более того, получена асимптотика для числа собственных значений, лежащих левее $z, z \leq 0$ и правее $z, z \geq 0$, оператора $\mathcal{A}_{\mu_0}$ по спектральному параметру $z \nearrow 0$ и $z \searrow 18$ соответственно.

Полученные результаты могут быть использованы в спектральной теории ограниченных самосопряженных операторов, а также в теоретической и математической физике.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. C. Tretter. Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications. Imperial College Press, 2008.

2. D. Mattis. The few-body problem on lattice. Rev. Modern Phys., 58 (1986), P. 361-379.

3. К.О. Фридрихс. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве, Мир, М., 1969.

4. В.А. Малышев, Р.А. Минлос. «Кластерные операторы», Труды семинара им. И.Г. Петровского, 9 (1983), С. 63-80.

5. A.E. Lifschitz. Magnetohydrodynamics and spectral theory, vol. 4 of Developments in Electromagnetic Theory and Applications. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989.

6. B. Thaller. The Dirac equation. Texts and Monographs in Physics. Springer, Berlin, 1992.

7. S. Albeverio, S.N. Lakaev, T.H. Rasulov. On the spectrum of an Hamiltonian in Fock space. Discrete spectrum asymptotics. J. Stat. Phys., 127:2 (2007), P. 191-220.

8. S. Albeverio, S.N. Lakaev, T.H. Rasulov. The Efimov effect for a model operator associated with the Hamiltonian of a non conserved number of particles. Methods Funct. Anal. Topology, 13:1 (2007), P. 1-16.

9. С.Н. Лакаев, Т.Х. Расулов. Об эффекте Ефимова в модели теории возмущений существенного спектра. Функц. анализ и его прил., 37:1, (2003), С. 81-84.

10. В.Н. Ефимов. Слабосвязанные состояния трех резонансно взаимодействующих частиц. Ядер. физика, 12:5, (1970), С. 1080-1091.

11. Д.Р. Яфаев. К теории дискретного спектра трехчастичного оператора Шредингера. Мат. сб., 9:4 (136:8), (1974), С. 567-592.

12. Yu.N. Ovchinnikov, I.M. Sigal. Number of bound states of three-body systems and Efimov's effect. Ann. Phys., 123:2, (1979), P. 274-295.

13. A.V. Sobolev. The Efimov effect. Discrete spectrum asymptotics. Comm. Math. Phys., 156, (1993), P. 101-126.

14. H. Tamura. The Efimov effect of three-body Schrödinger operators: asymptotics for the number of negative eigenvalues. Nagoya Math. J., 130, (1993), P. 55-83.

15. С.Н. Лакаев. О бесконечном числе трехчастичных связанных состояний системы трех квантовых решетчатых частиц. ТМФ, 89:1, (1991), С. 94-104.

16. С.Н. Лакаев. Об эффекте Ефимова в системе трех одинаковых квантовых частиц. Функц. анализ и его прил., 27:3, (1993), С. 15-28.

17. С.Н.Лакаев, Ж.И.Абдуллаев. Спектральные свойства разностного трехчастичного оператора Шрёдингера. Функц. анализ и его прил., 33:2 (1999), С. 84–88.

18. С.Н. Лакаев, З.Э. Муминов. Асимптотика для числа собственных значений трехчастичного опеатора Шредингера на решетке. Функ. анализ и его прил. 37:3, (2003), С. 85-88.

19. Ж.И. Абдуллаев, С.Н. Лакаев. Асимптотика дискретного спектра разностного трехчастичного оператора Шредингера на решетке. ТМФ, 136:2, (2003), С. 231-245.

20. S. Albeverio, S.N. Lakaev, Z.I. Muminov. Schrödinger Operators on Lattices. The Efimov Effect and Discrete Spectrum Asymptotics. Ann. Henri Poincarè, 5, (2004), P. 743-772.

21. М.Э. Муминов. О бесконечности числа собственных значений на лакуне существенного спектра оператора Шредингера трех частиц на решетке. ТМФ, 159:2 (2009), С. 299-317.

22. Ю.Х. Эшкабилов. Эффект Ефимова для одного модельного “трехчастичного” дискретного оператора Шредингера, ТМФ, 164:1 (2010), С. 78–87

23. M.I. Muminov, T.H. Rasulov. On the eigenvalues of a 2×2 block operator matrix. Opuscula Mathematica. 35:3 (2015), P. 369-393.

24. M.I. Muminov, T.H. Rasulov. Infiniteness of the number of eigenvalues embedded in the essential spectrum of a 2×2 operator matrix. Eurasian Mathematical Journal. 5:2 (2014), P. 60-77.

25. M.I. Muminov, T.H. Rasulov. Embedded eigenvalues of an Hamiltonian in bosonic Fock space. Communications in Mathematical Analysis. 17:1 (2014), P. 1-22.

26. O. Toeplitz. Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejer. Math. Z. 2: 1-2 (1918), P. 187-197.

27. F. Hausdorff. Der Wertvorrateiner Bilinearform. Math. Z. 3:1 (1919), P. 314-316.

28. A. Wintner. Zur Theorie der beschrankten Bilinearformen. Math. Z. 30:1 (1929), P. 228-281.

29. H. Langer, A.S. Markus, V.I. Matsaev, C. Tretter. A new concept for block operator matrices: the quadratic numerical range. Linear Algebra Appl. 330:1-3 (2001), P. 89-112.

30. L. Rodman, I.M. Spitkovsky. Ratio numerical ranges of operators. Integr. Equ. Oper. Theory. 71 (2011), P. 245-257.

31. W.S. Cheung, X. Liu, T.Y. Tam. Multiplicities, boundary points and joint numerical ranges. Operators and Matrices 5:1 (2011), P. 41-52.

32. H.L. Gau, C.K. Li, Y.T. Poon, N.S. Sze. Higher rank numerical ranges of normal matrices. SIAM J. Matrix Anal. Appl. 32 (2011), P. 23-43.

33. B. Kuzma, C.K. Li, L. Rodman. Tracial numerical range and linear dependence of operators. Electronic J. Linear Algebra. 22 (2011), P. 22-52.

34. C.K. Li, Y.T. Poon. Generalized numerical range and quantum error correction. J. Operator Theory 59 (2011), P. 335-351.

35. H.L. Gau. Elliptic numerical range of 4×4 matrices. Taiwanese J. Math. 10:1 (2006), P. 117-128.

36. D. Henrion. Semidefinite geometry of the numerical range. Electron J. Linear Algebra. 20 (2006), P. 322-332

37. K. Gustafson, K.M. Rao. Numerical range: The field of values of linear operators and matrices, Berlin, Springer, 1997, ArXiv+190 pp.

38. М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. Т.4. Анализ операторов. М.: Мир. (1982), 430 с.

39. М.Ш. Бирман, М.З. Саломяк. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Ленинград, Изд. Ленинградского университета. (1980), 264 с.

40. H. Langer, C. Tretter. Spectral decomposition of some nonselfadjoint block operator matrices. J. Operator Theory, 39:2 (1998), P. 339-359.

41. C. Tretter. Spectral inclusion for unbounded block operator matrices. J. Func. Anal., 256 (2009), P. 3806-3829.

42. Т.Х. Расулов, Г.И. Ботиров. Численный диапазон обобщенной модели Фридрихса. УзМЖ, 2(2013), 72-81.

43. Т.Х. Расулов, Х.Х. Турдиев. Некоторые спектральные свойства обобщенной модели Фридрихса. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 23: 2 (2011), С. 181-188.

44. V.V. Kostrykin, K.A. Makarov, A.K. Motovilov. Perturbation of spectra and spectral spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 359:1 (2007), P. 77-89.

45. Ю.В. Жуков, Р.А. Минлос. Спектр и рассеяние в модели “спин-бозон” с не более чем тремя фотонами. ТМФ, 103:1(1995), С. 63-81.

46. С.Н. Лакаев, Т.Х. Расулов. Модель в теории возмущений существенного спектра многочастичных операторов. Матем. заметки, 73:4 (2003), С. 556-564.

47. С.Н. Лакаев, М.Э. Муминов. Существенный и дискретный спектр трехчастичного оператора Шредингера на решетке. ТМФ, 135:3, (2003), С. 478-503.

48. K.O. Friedrichs. Perturbation of spectra in Hilbert space. Amer. Math. Soc. Providence, Rhole Island, 1965.

49. V.A. Malishev, R.A. Minlos. Linear infinite-particle operators. Translations of Mathematical Monographs. 143, AMS, Providence, RI, 1995.

50. R.P. Feyman. Statistical mechanics: a set of lectures (2nd ed.). Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1998, P. 151.

51. M. Muminov, H. Neidhardt, T. Rasulov. On the spectrum of the lattice spin-boson Hamiltonian for any coupling: 1D case. Journal of Mathematical Physics, 56 (2015), 053507.

52. Т.Х. Расулов. О ветвях существенного спектра решетчатой модели спин-бозон с не более чем двумя фотонами. ТМФ, 186:2 (2016), С. 293-310.

53. Т.Х. Расулов, Э.Б. Дилмуродов. Бесконечность числа собственных значений $2\times 2-$операторных матриц. Асимптотика дискретного спектра. ТМФ, 205:3 (2020), С. 368-390.

54. T.H. Rasulov, E.B. Dilmurodov. Eigenvalues and virtual levels of a family of 2×2 operator matrices. Methods of Functional Analysis and Topology. 25:3 (2019), P. 273-281.

55. T.H. Rasulov, E.B. Dilmurodov. Analysis of the spectrum of a 2×2 operator matrix. Discrete spectrum asymptotics. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, 11:2 (2020), P. 138-144.

56. T.H. Rasulov, E.B. Dilmurodov. Threshold analysis for a family of 2×2 operator matrices. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, 10:6 (2019), P. 616-622.

57. Т.Х. Расулов, Э.Б. Дилмуродов. Исследование числовой области значений одной операторной матрицы. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 35:2 (2014), С. 50-63.

58. E.B. Dilmurodov. New branches of the essential spectrum of a 2×2 operator matrix. Uzbek Mathematical Journal, 2 (2020), P. 44-51.

59. Э.Б. Дилмуродов. О виртуальных уровнях одного семейства матричных операторов порядка 2. Научный вестник БухГУ, 1 (2019), С. 42-46.

60. Т.Х. Расулов, Э.Б. Дилмуродов. Оценки для квадратичной числовой области значений одной операторной матрицы. Узбекский математический журнал, 1 (2015), С. 64-74.

Т.Х. РАСУЛОВ, Э.Б. ДИЛМУРОДОВ

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРНЫХ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(монография)

Muharrir:	*A. Qalandarov*
Texnik muharrir:	*G. Samiyeva*
Musahhih:	*Sh. Qahhorov*
Sahifalovchi:	*M. Ortiqova*

Nashriyot litsenziyasi AI № 178. 08.12.2010. Original-maketdan bosishga ruxsat etildi: 21.01.2022. Bichimi 60x84. Kegli 16 shponli. «Times New Roman» garn. Ofset bosma usulida bosildi. Ofset bosma qog`ozi. Bosma tobog`i 6,7. Adadi 100. Buyurtma №19.

"Sadriddin Salim Buxoriy" MCHJ
"Durdona" nashriyoti: Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko`chasi, 11-uy.
Bahosi kelishilgan narxda.

"Sadriddin Salim Buxoriy" MCHJ bosmaxonasida chop etildi.
Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko`chasi, 11-uy. Tel.: 0(365) 221-26-45